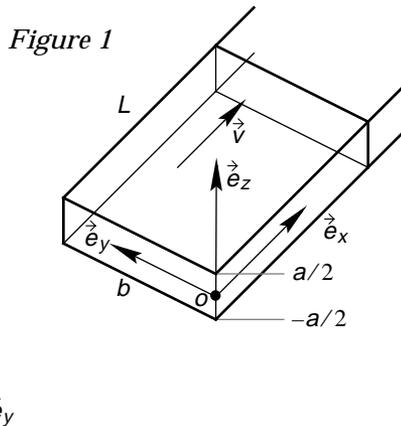


Ce problème comporte quatre parties, indépendantes dans une large mesure. Chaque partie étudie l'écoulement laminaire d'un fluide newtonien incompressible, de masse volumique ρ et de viscosité dynamique de cisaillement η . Les conditions d'écoulement sont données dans l'introduction de chaque partie. Le repère par rapport auquel on étudie l'écoulement, noté $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, est galiléen. (O, \vec{e}_z) est la direction verticale ascendante. Le champ de pesanteur est uniforme, de norme g : $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. Enfin x, y, z, t sont les coordonnées eulériennes des particules de fluide.

Partie I - Écoulement dans un conduit de section rectangulaire

Le fluide s'écoule dans un conduit rectangulaire de section ab , considéré illimité



selon la direction \vec{e}_x . Les parois matérielles horizontales d'une part, verticales d'autre part sont de nature différente. La paroi supérieure peut être en mouvement de translation selon \vec{e}_x . La température est uniforme sur l'ensemble du système. On ne considère que les écoulements de vitesse : $\vec{v} = v(z, t)\vec{e}_x$ dont le champ de pression est $p = p(x, z, t)$.

I.A - Commenter les deux champs eulériens proposés : direction de \vec{v} , dépendance selon les coordonnées eulériennes. Préciser les conditions que doit vérifier la vitesse sur les parois horizontales. Qu'en est-il sur les parois verticales ? Donner la valeur de l'accélération particulaire convective.

I.B - En faisant un bilan de quantité de mouvement relatif à un parallélépipède élémentaire de fluide, de côtés dx , dy , dz , établir les équations ci-dessous, satisfaites par les fonctions v et p , leurs dérivées partielles et les données ρ , η et g .

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g$$

Dans toute la suite de cette partie, **l'écoulement est stationnaire**.

I.C - Justifier que la pression dépend linéairement de x , à z donné. On note : $p_1 = p(x=0, z=0)$, $p_2 = p(x=L, z=0)$ et $\Delta p = p_1 - p_2$. Déterminer complètement le champ de pression $p(x, z)$. Qualifier la répartition de pression dans les plans d'abscisse x .

I.D - Dans cette question la paroi supérieure est immobile.

I.D.1) Le fluide s'écoulant dans le sens de \vec{e}_x , quel doit être le signe de Δp ?

I.D.2) Établir l'expression de la vitesse $v(z)$ en fonction de z et des données. Exprimer sa valeur maximale v_M et sa valeur moyenne v_m . Représenter le profil du champ des vitesses.

I.D.3) Calculer le débit massique D_m à travers la section ab , en fonction de la valeur moyenne de la vitesse.

I.D.4) Par intégration des densités surfaciques de force de viscosité, calculer la force \vec{F} qu'il faut exercer sur les deux parois horizontales, relativement aux rectangles d'aire Lb (L selon x , b selon y) pour les maintenir immobiles. On exprimera \vec{F} en fonction de Δp et des données géométriques. Retrouver ce résultat par un bilan de quantité de mouvement relatif au fluide contenu dans le parallélépipède de côtés L , b , a .

I.E - Dans cette question la paroi supérieure est en mouvement de translation, de vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$.

I.E.1) Établir l'expression de la vitesse $v(z)$ en fonction de z et des données. Commenter l'expression trouvée. On envisagera le cas $\Delta p = 0$.

I.E.2) Calculer la valeur de v_0 pour laquelle le débit massique à travers la section ab est nul. Le signe du produit $v_0 \Delta p$ est-il prévisible ?

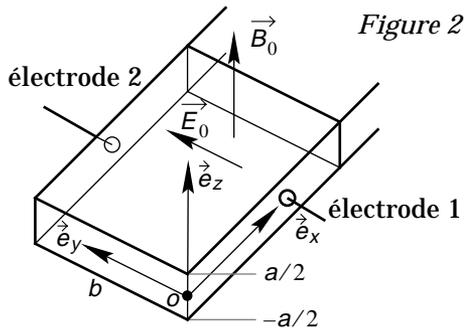
I.E.3) Dans ce cas, exprimer $v(z)$ en fonction de z et des paramètres v_0 (pris positif) et a . Représenter le profil du champ des vitesses.

I.E.4) v_0 ayant la valeur établie ci-dessus, quelle force faut-il exercer sur la plaque mobile, relativement à l'aire bL , pour maintenir l'écoulement stationnaire ? On exprimera cette force en fonction de v_0 , des paramètres géométriques et de η .

I.F - Les questions I.D et I.E étudient l'écoulement stationnaire d'un fluide visqueux sous l'action d'un gradient de pression seul, puis associé au mouvement d'une paroi. Qu'en serait-il pour un fluide idéal ?

Partie II - Écoulement d'un liquide conducteur sous l'action d'un champ d'induction magnétique

Le fluide étudié ici est une huile, incompressible, visqueuse, de permittivité dié-



\vec{e}_y

lectrique ϵ , de perméabilité magnétique μ_0 (celle du vide). Le liquide est légèrement conducteur, de conductivité électrique γ . Il est placé dans un conduit de section rectangulaire, analogue à celui de la partie précédente. La température est uniforme sur l'ensemble du système. Les deux parois horizontales sont faites d'un matériau non conducteur. Les deux parois verticales (électrodes 1 et 2), conductrices, sont portées respectivement au potentiel V_1 et V_2 . On note U la d.d.p installée : $U = V_1 - V_2 > 0$. Le liquide est ainsi soumis au champ électrique uniforme $\vec{E}_0 = E_0 \vec{e}_x$, où $E_0 = U/b$.

II.A - Exprimer le vecteur densité de courant volumique \vec{j} . En l'absence d'un gradient de pression horizontal, le liquide peut-il être en mouvement ?

II.B - On installe un champ d'induction magnétique uniforme et indépendant du temps, de direction \vec{e}_z : $\vec{B}_0 = B_0 \vec{e}_z$. Montrer que le liquide, initialement en équilibre, ne peut le rester, préciser la direction de son écoulement. Il s'agit de

l'écoulement de Hartmann, étudié schématiquement ici. On lira, en fin de texte, la note I, qui précise le cadre technique dans lequel intervient cet écoulement.

Dans toute la suite le **régime est stationnaire**.

On considère le champ de vitesse du fluide : $\vec{v} = v(z)\vec{e}_x$. Le champ électrique est inchangé : $\vec{E}_0 = E_0\vec{e}_y$. En revanche, les vecteurs champ d'induction magnétique \vec{B} (dans le liquide et à l'extérieur) et densité de courant volumique \vec{j} ont, a priori, trois composantes, chaque composante ne pouvant dépendre que de la cote z .

II.C - Préciser les directions des vecteurs \vec{j} et \vec{B} . Justifier la nouvelle équation matérielle du milieu $\vec{j} = \gamma(\vec{E}_0 + \vec{v} \wedge \vec{B})$. Rappeler les deux équations de Maxwell, en régime stationnaire, relatives à la circulation et au flux de \vec{B} . Expliciter ces trois équations en cartésiennes. En déduire l'expression des vecteurs \vec{j} et \vec{B} : $\vec{j} = j(z)\vec{e}_y$, $\vec{B} = B(z)\vec{e}_x + B_0\vec{e}_z$. Analyser la symétrie du système. Conclure sur la parité des fonctions $j(z)$ et $B(z)$.

II.D - Établir l'équation de l'écoulement sur \vec{e}_x . En fait, il suffira de préciser quelle force supplémentaire il faut ajouter au bilan fait à la question I.B.

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{d^2 v}{dz^2} + \gamma B_0 (E_0 - v B_0)$$

Dans la suite, on prendra le gradient de pression selon \vec{e}_x nul. Justifier ce choix.

II.E - Établir l'expression de v en fonction de la cote z et des paramètres :

$$a, w_0 = \frac{E_0}{B_0} \text{ et } z_0 = \frac{1}{B_0} \sqrt{\frac{\eta}{\gamma}}.$$

II.F - Calculer $B(z)$ en tout point de l'espace, en donner une représentation graphique.

II.G - Calculer l'intensité i par unité de longueur selon Ox , du courant électrique circulant dans l'huile, en fonction de i_0 (valeur de i en l'absence d'induction magnétique) et du nombre de Hartmann

$$H = \frac{1}{2} a B_0 \sqrt{\frac{\gamma}{\eta}}.$$

II.H - Confrontation avec l'étude expérimentale. Données : $\eta = 8,3 \times 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$; $\gamma = 0,38 \times 10^{-9} \Omega^{-1} \cdot \text{m}$; $a = 0,18 \text{ mm}$; $b = 2,5 \text{ mm}$; $U = 45 \text{ kV}$; $B_0 = 45 \text{ mT}$. On consultera le graphique expérimental de la note I reportée en fin de texte.

II.H.1) Calculer la valeur numérique de z_0 . En déduire qu'une expression approchée de $v(z)$ est parfaitement admissible. Donner cette expression approchée en fonction de z et des paramètres du problème. Calculer la valeur numérique de la valeur maximale de la vitesse. Commentaires.

II.H.2) Les électrodes ayant une surface de 10cm^2 , comparer la valeur calculée de i_0 et la valeur expérimentale. L'expression de i_0 , établie ci-dessus, est-elle conforme aux mesures ?

II.H.3) Représenter graphiquement la fonction $(\tanh H)/H$, pour $H \in [1, 10]$. Comparer la courbe aux courbes expérimentales $I(B_0)$.

II.H.4) En fait $H = kB_0$. Calculer la valeur numérique de k en mT^{-1} . Comparer, alors, la courbe théorique i/i_0 à la courbe expérimentale, dans le domaine de champ d'induction exploré expérimentalement. Conclure quant à la validité de ce modèle magnétohydrodynamique.

Partie III - Questions préliminaires aux parties IV et V

Les parties IV et V étudient l'écoulement d'un fluide dilatable, sous l'action d'un gradient de température. Aucune connaissance préalable sur les phénomènes étudiés n'est nécessaire.

III.A - On considère un fluide en équilibre dans le champ de pesanteur. Aucune supposition n'est faite sur sa masse volumique. On rappelle l'équation d'équilibre : $(1/\rho)\text{grad}(\rho) = \vec{g}$. Démontrer que les surfaces isobares coïncident avec les surfaces de masse volumique constante, pour que l'équilibre présumé soit possible. On pourra utiliser l'identité (s est un champ scalaire, \vec{a} est un champ vectoriel) : $\text{rot}(s\vec{a}) = s\text{rot}(\vec{a}) + \text{grad}(s) \wedge \vec{a}$.

Qu'en est-il pour un fluide non barotrope ? On rappelle qu'un fluide barotrope est un fluide dont la masse volumique ne dépend que de la pression.

III.B - Dans toute la suite, le fluide visqueux est incompressible et dilatable. On donne son coefficient de dilatation : $\alpha = -(1/\rho)(d\rho/dT)$. On note $\rho(T_0) = \rho_0$. Exprimer la masse volumique $\rho(T)$ en fonction de ρ_0 , α et de la différence de température $T - T_0$ en tenant compte de la condition, valable dans toute la suite : $|\rho(T) - \rho_0| \ll \rho_0$. Enfin, on donne l'équation de transport thermique dans un fluide :

$$\Delta T = \frac{1}{\kappa} \frac{DT}{Dt} = \frac{1}{\kappa} \left[\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) T \right].$$

On aura reconnu la dérivée particulière de la température $T(x, y, z, t)$ et le coefficient κ de diffusivité thermique du fluide.

Partie IV - Écoulement entre deux plaques parallèles de températures différentes
 $\vec{\text{grad}} T$ est orthogonal à \vec{g}

Le fluide **pesant** est situé entre deux plaques planes parallèles, verticales, d'abscisse $-a/2$ et $+a/2$, considérées illimitées. Leur température est respectivement : $T_0 - \theta/2$ et $T_0 + \theta/2$, avec $\theta > 0$.

IV.A - On admet que la température varie linéairement en fonction de x entre les deux valeurs extrêmes $T_0 \pm \theta/2$.

IV.A.1) Exprimer la masse volumique en fonction de x et des paramètres du problème : ρ_0 , α , θ , a .

IV.A.2) Justifier qualitativement que le fluide, qui était en équilibre, à la température T_0 , ne peut le rester lorsque le gradient de température est installé. Étudier l'influence des forces de viscosité. Décrire l'écoulement du fluide.

IV.B - Cette question est la résolution qualitative simplifiée du mouvement. On se place en **régime stationnaire** et on formule les hypothèses simplificatrices suivantes : le fluide est de champ de vitesse $\vec{v} = v(x)\vec{e}_z$; le champ de pression est le même que pour le fluide en équilibre isotherme ; la viscosité cinématique $\nu = \eta/\rho$ est une constante indépendante de la température.

IV.B.1) Justifier que la température n'est fonction que de l'abscisse, selon la loi linéaire admise en IV.A.

IV.B.2) Écrire l'équation du mouvement selon \vec{e}_z .

IV.B.3) En déduire l'équation $\frac{d^2v}{dx^2} + Kx = 0$ où $K = g\frac{\alpha\theta}{\nu a}$.

IV.B.4) Exprimer $v(x)$. Représenter le profil du champ des vitesses. L'écoulement est-il rotationnel ?

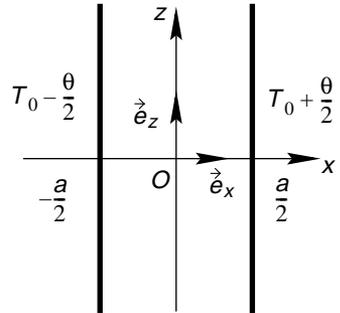


Figure 3

Partie V - Écoulement entre deux plaques parallèles de températures différentes
 $\text{grad} T$ est parallèle à \vec{q}

Le fluide **pesant** est situé entre deux plaques planes parallèles, horizontales, de cote $-a/2$ et $a/2$, considérées illimitées. Leur température est respectivement : $T_0 + \theta/2$ et $T_0 - \theta/2$, avec $\theta > 0$.

V.A - Justifier que le fluide peut être en équilibre, contrairement à la situation précédente.

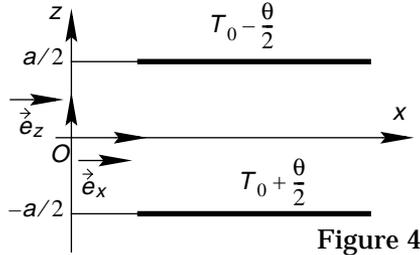


Figure 4

V.B - Dans certaines conditions, l'équilibre observé est instable. Cette question est une approche qualitative de l'instabilité. On admet que le gradient de température est uniforme de valeur $-\theta/a$ selon \vec{e}_z . On considère un volume de fluide ayant la forme d'une sphère de rayon r , dont le centre est de cote z . Cette boule de fluide est en équilibre de température avec le fluide extérieur et en équilibre mécanique sous l'action de son poids et de la poussée d'Archimède. À l'instant $t = 0$, une perturbation lui communique une vitesse ascendante \vec{v} , de norme v . On considère que la température de la boule garde la valeur $T(z)$ pendant une durée τ , dont on admettra l'expression : $\tau = A(r^2/\kappa)$, où A est une constante géométrique.

V.B.1) Évaluer l'écart de température δT existant, à l'instant τ , entre la boule et le fluide qui l'entoure. Exprimer la force \vec{F} qui s'exerce sur la boule, en fonction de a , r , g , ρ_0 , α , θ , τ et v .

V.B.2) Comparant \vec{F} à la force de viscosité qui s'exerce sur la boule, donnée par la loi de Stokes $\vec{F}_v = -6\pi\eta r\vec{v}$, donner le critère d'instabilité. Examiner rapidement le cas où \vec{v} est descendant. En prenant pour valeur du rayon la valeur maximale $r = a/2$, montrer que l'équilibre est instable si le rapport (adimensionné) $Ra = (\alpha\theta g a^3)/(\nu\kappa)$, appelé nombre de Rayleigh, est supérieur à une valeur critique Ra_c à déterminer.

V.B.3) Application numérique. On donne : $\alpha = 10^{-3} \text{K}^{-1}$; $\nu = 10^{-4} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$; $g = 10 \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$; $\kappa = 10^{-7} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$; $A = 4,2 \cdot 10^{-2}$. Calculer Ra_c et la valeur minimale de θ , pour que le fluide soit en mouvement, les deux plaques étant distantes de 1 cm.

On consultera - Note II, en fin de texte - la description de ce phénomène que l'on appelle l'instabilité de Rayleigh-Bénard.

V.C - Cette question est une approche quantitative simplifiée de l'instabilité. On donne les équations satisfaites par les fonctions v (composante de \vec{v} sur la direction z) et T .

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g + v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\kappa} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial z} \right).$$

Au-dessous du seuil d'instabilité, le fluide est en équilibre. Les solutions de ces deux équations sont alors simplement : $v_e = 0$, $T_e(z) = T_0 - \theta z/a$ et $p_e(z)$ tel que $dp_e/dz = -\rho_e g$. Se plaçant légèrement au-dessus du seuil d'instabilité, on considère les fonctions : $v = v(x, t)$, $p(x, z, t) = p_e(z) + \delta p(x, t)$, $\rho(x, z, t) = \rho_e(z) + \delta \rho(x, t)$ et $T(x, z, t) = T_e(z) + \delta T(x, t)$. Les fonctions v , δp , $\delta \rho$ et δT , sont des perturbations du premier ordre.

V.C.1) Écrire les deux équations satisfaites par les fonctions v et δT , en ne gardant que les termes du premier ordre.

V.C.2) On considère les fonctions : $v(x, t) = v_0 e^{st} \cos xh$ et $\delta T = \delta T_0 e^{st} \cos xh$ où $h = \pi/a$ et s est un coefficient à déterminer. Quel défaut présente la fonction proposée $v(x, t)$? De quel phénomène rend compte le facteur $\cos xh$? En portant les fonctions proposées dans le système de la question V.C.1, montrer que s est solution de l'équation :

$$s^2 + h^2(v + \kappa)s + h^4 v \kappa - 4\alpha g \frac{\theta}{a} = 0.$$

V.C.3) Quel doit être le signe de s pour que le fluide soit en mouvement ? Calculer Ra_c et la valeur minimale de θ pour une distance des plaques de 1cm.

V.C.4) Comparer les valeurs du rapport critique Ra_c , trouvées aux questions V.B.3 et V.C.3, à la valeur expérimentale.

••• FIN •••

Note I. Écoulement de Hartmann. Les huiles minérales sont des liquides diélectriques couramment utilisés dans les équipements électriques de puissance à haute tension pour leurs propriétés d'isolation électrique et de conduction de la chaleur. Pour un refroidissement efficace, l'huile est en contact direct avec les conducteurs. Dans les conditions normales de fonctionnement, l'huile est soumise non seulement au champ électrique dû aux tensions appliquées, mais aussi au champ d'induction magnétique créé par les courants circulant dans les conducteurs. On étudie les propriétés conductrices de l'huile, en présence d'un champ d'induction magnétique, par le montage représenté dans la figure A. Deux électrodes plongent dans un bac d'huile, soumis à un champ d'induction magnétique créé par deux bobines. Le dispositif décrit et étudié dans la partie II est une idéalisation de ce montage. Les mesures sont traduites par les courbes (figure B), où l'on a porté I en fonction de B , à U donné.

Note II. Instabilité de Rayleigh-Bénard (figure C). Le fluide (gaz ou liquide) est confiné dans une cellule parallélépipédique. Les faces horizontales sont très bonnes conductrices de

Figure A

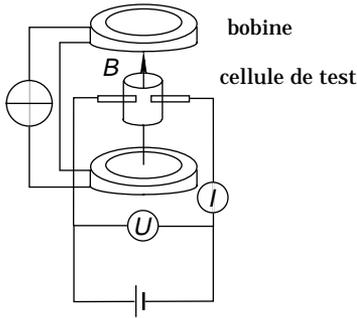
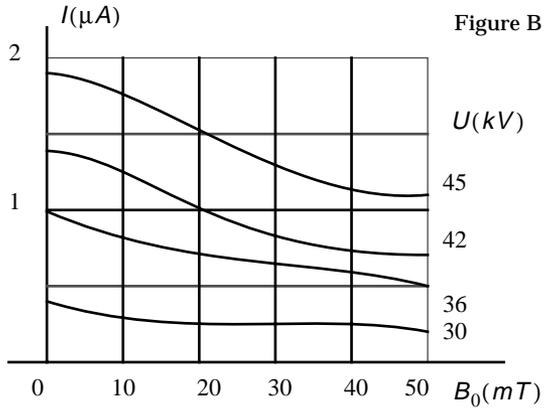


Figure B



la chaleur (cuivre), la plaque inférieure est maintenue à la température $T_0 + \theta/2$, la plaque supérieure à la température $T_0 - \theta/2$. les plaques verticales sont en plexiglas transparent, ce qui permet, par des mesures optiques, d'étudier les mouvements du fluide. On constate, expérimentalement, que le fluide reste en équilibre tant que θ ne dépasse pas une valeur critique θ_c . Au delà, on observe des mouvements convectifs. Pour θ légèrement supérieur à la valeur critique, il s'établit un régime stationnaire, spatialement périodique. L'écoulement est formé de rouleaux d'axes horizontaux, parallèles au petit côté de la cellule, deux rouleaux contigus tournant dans des sens opposés. La valeur de θ_c (ordre de grandeur 1K) dépend des dimensions de la cellule et de la nature du fluide. En revanche, la valeur critique du nombre de Rayleigh est universelle. Sa détermination expérimentale donne des valeurs voisines de 1700.

Figure C

