Les hypothèses des théorèmes utilisés devront être précisées et vérifiées.

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés de la fonction ζ, qui sera définie dans la première partie, et d'établir, pour s réel de l'intervalle $]0, 1[$, l'équation fonctionnelle suivante :

$$(E) \qquad \zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s)\zeta(s)$$

Avec :

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$$

On posera, dans tout le problème, pour tout entier naturel non nul N et pour tout réel $s > 0$:

$$S_N(s) = \sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{n^s}, \quad H_N(s) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s}, \quad K_N(s) = \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(2n-1)^s}$$

Partie I - Définition et propriétés de ζ

I.A - Définition de ζ.

Soit $s > 0$, n un entier naturel non nul. Posons :

$$u_n(s) = \frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^s}$$

I.A.1) Montrer que :

$$0 \le u_n(s) \le \frac{s}{n^{s+1}}$$

I.A.2) Prouver que la série de fonctions de terme général u_n converge simplement sur $]0, +\infty[$ et que sa somme, qui sera notée U dans la suite, est une fonction continue sur $]0, +\infty[$.

I.A.3) Prouver que, pour $s \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, la suite de terme général :

$$H_N(s) - \frac{N^{1-s}}{1-s}$$

possède une limite, notée $\zeta(s)$ que l'on exprimera à l'aide de $U(s)$.

I.A.4) Prouver que la suite de terme général : $H_N(1) - \ln N$ admet une limite strictement positive notée γ dans la suite du problème.

I.B - Autre expression de ζ.

I.B.1) Soit s un réel strictement positif ; prouver que la série de fonctions de la variable réelle s :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

définit sur $]0, +\infty[$ une fonction de classe C^1 qui sera notée f dans la suite.

I.B.2) Exprimer $S_{2N}(s)$ à l'aide de $H_{2N}(s)$ et $H_N(s)$. En déduire, si $s \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$:

$$f(s) = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right)\zeta(s)$$

I.B.3) En déduire, en décomposant autrement $S_{2N}(s)$ que, pour les mêmes valeurs de s, la suite de terme général

$$K_N(s) - \frac{N^{1-s}}{2^s(1-s)}$$

a une limite qu'on exprimera à l'aide de $\zeta(s)$.

I.C - Calcul approché de valeurs de ζ.

Dans cette question on négligera les erreurs d'arrondi.

I.C.1) Donner un algorithme de calcul approché de $f(s)$ à une précision ε fournie. L'appliquer au calcul de $\zeta(1/2)$ à 10^{-1} près.

I.C.2) Proposer un algorithme de calcul de $S_{2^p}(s)$ fondé sur la relation suivante, dont la vérification n'est pas demandée :

$$H_{4N}(s) = (1 + 2^{-s})H_{2N}(s) - 2^{-s}H_N(s) + \sum_{n=N}^{2N-1} \frac{1}{(2n+1)^s}$$

Quels sont ses avantages par rapport à l'algorithme de la question précédente ? Calculer $\zeta(4/3)$ à 10^{-3} près.

I.D - Étude au voisinage de $+\infty$.

Quelle est la limite de f lorsque s tend vers $+\infty$?

I.E - Étude au voisinage de 1.

I.E.1) Montrer que, lorsque s est au voisinage de 1 :

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1)$$

I.E.2) Prouver, en calculant $f'(1)$ de deux façons, que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n} = \left(\gamma - \frac{\ln 2}{2}\right)\ln 2$$

Partie II - Calcul de sommes de séries et d'intégrales

Soit ϕ une fonction de classe C^1 sur le segment $[-\pi, \pi]$, à valeurs complexes. On pose, pour tout entier naturel :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) \cos nt\, dt$$

On notera ψ la fonction, définie sur $\mathbb{R}$, 2π-périodique, telle que :

$$\forall x \in [-\pi, \pi], \quad \psi(x) = \frac{\phi(x) + \phi(-x)}{2}$$

II.A - Exprimer les coefficients de Fourier (en cosinus et sinus) de ψ à l'aide des a_n. Pour $x \in \mathbb{R}$, prouver la convergence de la série de terme général $a_n \cos nx$ et calculer à l'aide de la fonction ϕ :

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx \text{ pour } -\pi \le x \le \pi$$

II.B - Montrer que la série de terme général a_n est absolument convergente.

II.C - Exprimer, à l'aide de $\phi(0)$, $\phi(\pi)$, $\phi(-\pi)$, les deux sommes suivantes

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ , \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}$$

II.D - En choisissant comme fonction ϕ la fonction $t \mapsto e^{\lambda t}$ et en donnant au nombre complexe λ des valeurs adéquates, prouver les relations suivantes :

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - n^2} \text{ pour } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

$$\frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2x}{x^2 + (2n+1)^2 \pi^2} \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$

II.E - Soient $s > 0$ et $x > -1$; prouver l'intégrabilité, sur $]0, +\infty[$ de

$$t \mapsto \frac{t^{s-1}}{e^t + x}$$

On désignera, dans la suite, par $\Gamma(s)$ la valeur de l'intégrale correspondante pour $x = 0$ (cf préambule).

II.F - Dans cette question x est un réel tel que $|x| < 1$ et s un réel strictement positif.

II.F.1) Démontrer la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t + x}\, dt = \Gamma(s) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)^s}$$

II.F.2) En déduire la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t + 1}\, dt = \Gamma(s) f(s)$$

II.G - Dans cette question, x et s sont des réels de l'intervalle $]\,0, 1\,[$.

On fixe x et on définit une suite (υ_n) de fonctions définies sur l'intervalle $]\,0, 1]$ par :

$$\begin{cases} \upsilon_0(t) = t^{x-1} \\ \upsilon_n(t) = (-1)^n t^{n-1}[t^x - t^{-x}] \text{ si } n \geq 1 \end{cases}$$

II.G.1) Calculer $\int_0^1 \upsilon_n(t)\,dt$. Prouver la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\, dt = \frac{\pi}{\sin \pi x}$$

II.G.2) Soit a un réel strictement positif. Calculer les intégrales :

$$I(a, s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^s}{a^2 + t^2}\, dt \quad , \qquad J(a, s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} \arctan\left(\frac{a}{t}\right) dt .$$

Partie III - Équation fonctionnelle de la fonction ζ

III.A - Où l'on obtient (E).

Dans cette question, s vérifie toujours $0 < s < 1$. Pour $x > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$\phi_N(x) = \frac{1}{e^x + 1} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2x}{x^2 + (2n+1)^2 \pi^2}$$

III.A.1) Etablir les inégalités :

$$\frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{(2N-1)\pi}{x}\right) \leq \phi_N(x) \leq \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{(2N+1)\pi}{x}\right)$$

III.A.2) En déduire l'encadrement :

$$\frac{(2N-1)^s}{2s} - K_N(1-s) \le \pi^{-s}\cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\Gamma(s) f(s) \le \frac{(2N+1)^s}{2s} - K_N(1-s)$$

puis l'équation fonctionnelle (E).

III.B - Retour sur l'étude de ζ au voisinage de 0.

III.B.1) Démontrer que Γ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\Gamma'(1) = \lim_{n \to \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t\, dt$$

On pourra utiliser l'inégalité $(1 - t/n)^n \le e^{-t}$ *que l'on ne démontrera que si l'on a le temps.*

III.B.2) En utilisant un changement de variable, déduire que $\Gamma'(1) = -\gamma$.

III.B.3) Trouver un développement limité au premier ordre de ζ au voisinage de 0.

••• FIN •••