Un haut-parleur est un transducteur qui transforme un signal électrique en une onde sonore, idéalement sans distorsion d'amplitude et de phase et de manière isotrope pour toutes les fréquences audibles $[20\ \mathrm{Hz} - 20\ \mathrm{kHz}]$. 85% des haut-parleurs utilisés aujourd'hui sont dérivés du haut-parleur électrodynamique mis au point par Rice et Kellog en 1924, qui reste inégalé en basses et moyennes fréquences pour son rapport performance/prix. Ce problème présente ses caractéristiques essentielles, de son principe à sa mise en œuvre.

Notations : Les vecteurs sont notés en caractères gras.

À toute fonction sinusoïdale du temps f de pulsation ω, on associera son amplitude complexe $\underline{f}$, telle que $f(t) = Re(\underline{f}\,e^{j\omega t})$. Si,de plus, f dépend de z, on lui associera $\underline{f}(z)$ telle que $f(z,t) = Re(\underline{f}(z)e^{j\omega t})$. Les applications numériques des parties I et II seront faites pour un haut-parleur dit “de référence”, dont le constructeur donne les caractéristiques suivantes (définies plus loin) :

Plage d'utilisation : $0,8 - 8\ \mathrm{kHz}$ — Surface membrane S : $73\ \mathrm{cm^2}$

Résistance R : $6,5\ \Omega$ — Sensibilité σ_0 : $90\ \mathrm{dB}$

Pour l'air on prendra :

Masse volumique : $\rho_0 = 1,25\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ — Compressibilité : $\chi = 6,8 \times 10^{-6}\ \mathrm{Pa^{-1}}$

N.B. : De nombreuses questions sont indépendantes. Il est cependant souhaitable de les traiter dans l'ordre. Une part importante du barème porte sur les questions qualitatives : seules les réponses claires et concises seront prises en compte.

Partie I — Ondes sonores

L'étude concerne la propagation du son dans l'air, initialement au repos, assimilé à un gaz parfait, non visqueux, subissant des transformations adiabatiques réversibles. On notera respectivement P, ρ, $\boldsymbol{v}$, les champs de pression, masse volumique et vitesse. Le coefficient de compressibilité isentropique de l'air est noté χ. La pesanteur sera négligée.

I.A - Équations de propagation

I.A.1) Écrire l'équation vectorielle d'Euler, l'équation de conservation de la masse (ou équation de continuité) et exprimer χ en fonction de ρ et de P.

I.A.2) On note P_0 et ρ_0 les valeurs moyennes des champs correspondants et $p = P - P_0$ le champ de surpression. Rappeler en quoi consiste l'approximation acoustique. Cette hypothèse sera conservée dans toute la suite du problème.

I.A.3) On rappelle les propriétés d'analyse vectorielle suivantes, où f et $\boldsymbol{A}$ représentent respectivement des champs scalaire et vectoriel :

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{grad} f = \Delta f \qquad\qquad \boldsymbol{rot}\ \boldsymbol{grad} f = \vec{0}$$

$$\mathbf{rot}\ \mathbf{rot} A = \mathbf{grad}\ div\mathbf{A} - \vec{\Delta}\mathbf{A}$$
$$div\ f\mathbf{A} = f\ div\ \mathbf{A} + \mathbf{grad}\ f \cdot \mathbf{A}$$

Établir les équations de propagation de l'onde acoustique en justifiant soigneusement chaque étape :

$$\rho_0 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\mathbf{grad}\ p \qquad div\ \mathbf{v} = -\chi \frac{\partial p}{\partial t} \qquad (1)$$

puis

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = c^2 \Delta p \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \mathbf{v} \qquad (2)$$

en donnant la valeur de c en fonction des données.

I.A.4) Application numérique : calculer c.

I.B - Ondes planes sinusoïdales

On considère une onde plane progressive sinusoïdale se propageant suivant la direction $+\mathbf{u}_z$. On pose : $\underline{\mathbf{v}}(z) = \underline{v}(z)\mathbf{u}_z = \underline{v}_0 e^{-jkz}\mathbf{u}_z$ et $\underline{p}(z) = \underline{p}_0 e^{-jkz}$.

I.B.1) Établir la relation entre k et ω. Exprimer $\underline{p}(z)$ en fonction de $\underline{v}(z)$. Quel est le déphasage entre ces deux grandeurs ? Montrer que l'onde de vitesse est longitudinale.

I.B.2) La puissance $\mathcal{P}$ rayonnée par l'onde à travers une surface Σ perpendiculaire à Oz s'exprime comme la puissance moyenne de la force de surpression appliquée par l'onde sur Σ. On pose $\mathcal{P} = \Pi\,\Sigma$. Que représente Π ? Montrer que

$$\Pi = \frac{1}{2\rho_0 c}\left|\underline{p}_0\right|^2 \qquad (3)$$

I.B.3) Application numérique : on définit l'intensité sonore d'un son par

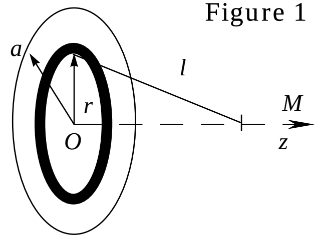
$$I = 10\log_{10}\left(\frac{\Pi}{\Pi_0}\right), \text{ avec } \Pi_0 = 1,0 \times 10^{-12}\ \mathrm{W.m^{-2}}.$$

Calculer numériquement $\left|\underline{p}_0\right|$ correspondant à une intensité sonore de $90\ \mathrm{dB}$ (rue bruyante).

I.C - Création d'onde sonore

Un haut-parleur peut, en première approximation, être modélisé (figure 1) du point de vue de son rayonnement par un disque plan de rayon a de surface $S = \pi a^2$. On repère la position du disque sur l'axe Oz par sa cote $\xi(t)$, prise nulle au repos et on pose $V(t) = \dot{\xi}(t)$. On se place en régime sinusoïdal : $\underline{\xi} = \xi_0 e^{j\omega t}$. On admet que le disque impose les conditions aux limites de l'onde qu'il rayonne et que l'onde

Figure 1



est localement plane au voisinage du disque. On pose alors : $\underline{v}(0) = \underline{V}$ et on note $\underline{p}(0)$ la surpression supposée uniforme au niveau de la face du disque dirigée vers les z croissants.

I.C.1) On s'intéresse à la pression sur l'axe au point M, de coordonnées $(0, 0, z)$ avec $z > 0$. On applique le principe de Huygens-Fresnel en écrivant que la pression élémentaire complexe créée en M par une couronne élémentaire de rayon r de la membrane vaut :

$$\delta \underline{p}(z) = K\,\underline{p}(0)\; 2\pi r \delta r \frac{e^{-jkl}}{l} \quad (\text{avec } l = \sqrt{r^2 + z^2})$$

Justifier chaque terme de cette expression.

I.C.2) Établir la relation

$$\underline{p}(z) = \underline{A}\left[e^{-jk\sqrt{z^2 + a^2}} - e^{-jkz}\right],$$

en exprimant $\underline{A}$ en fonction des données.

I.C.3) Détermination de $\underline{A}$. On suppose, uniquement dans cette question, le milieu légèrement absorbant. Traduire cette propriété sur k. Que devient $\underline{p}(z)$ lorsque $a \to +\infty$? Quelle est alors la nature de l'onde ? En déduire que $\underline{A} = -\underline{p}(0)$. On admettra la généralité du résultat et on adopte cette valeur pour toute la suite du problème.

I.C.4) On note $\lambda = 2\pi/k$ et on se place dans les conditions dites de champ lointain : $z \gg a$ et $\lambda/a \gg a/z$. Ces conditions sont-elles numériquement vérifiées pour le haut-parleur de référence, avec $z = 1\ \mathrm{m}$? Dans toute la suite et dans ces conditions, on admettra que les ondes sont localement planes, ce qui permettra d'utiliser les résultats du I.B, en particulier pour relier $\underline{p}(0)$ et $\underline{V}$.

I.C.5) Montrer que dans les conditions de champ lointain :

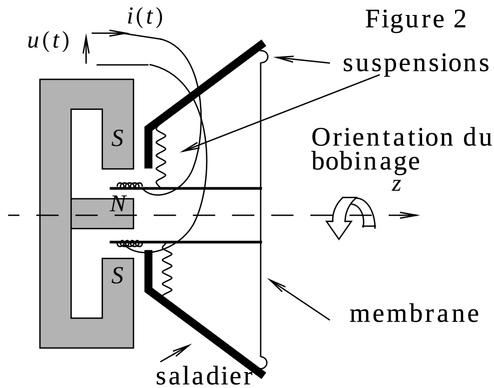
$$\left|\underline{p}(z)\right| \cong \frac{\rho_0 \xi_0 S \omega^2}{2\pi z}. \qquad (4)$$

Un dipôle oscillant placé en 0 peut aussi produire en M $(0,0,z \gg \lambda)$ une onde électromagnétique localement plane, d'axe Oz, dont le champ est proportionnel à ω^2/z. Préciser la position que doit avoir le dipôle pour que la direction Oz soit celle de son rayonnement maximal.

I.C.6) Application numérique : en prenant pour S la valeur donnée pour le haut-parleur de référence, calculer l'amplitude de vibration du disque produisant une intensité sonore de $90\ \mathrm{dB}$ à $1\ \mathrm{m}$ du disque sur l'axe, pour $f = 1\ \mathrm{kHz}$ puis pour $f = 60\ \mathrm{Hz}$. Commenter ces deux valeurs.

Partie II — Haut-parleur

On considère le haut-parleur représenté figure 2 en coupe, possédant la symétrie de révolution autour de Oz.



Il comporte :

- un équipage mobile, de masse m, constitué d'une membrane plane de surface S, solidaire d'un tube sur lequel est collé une bobine de résistance R et d'inductance négligeable, réalisée avec un fil de longueur l.
- un socle fixe comportant un aimant qui crée un champ magnétique centrifuge de module B uniforme dans son entrefer, où est logée la bobine. Sur ce socle est fixé un saladier conique.
- des suspensions latérales entre le saladier et l'équipage mobile, qui réduisent les mouvements de ce dernier à une translation suivant Oz.

II.A - Modélisation

On repère la position de la membrane sur l'axe Oz par sa cote $\xi(t)$, prise nulle au repos et on pose $V(t) = \dot{\xi}(t)$, en accord avec la partie I - . On note $u(t)$ la tension aux bornes du circuit électrique, $i(t)$ le courant qui y circule. L'orientation du circuit est précisée sur la figure 2. On se place en régime sinusoïdal, de pulsation ω.

II.A.1) *Équation électrique*. Déterminer l'équation électrique du haut-parleur en utilisant les variables $\underline{u}$, $\underline{V}$ et $\underline{i}$.

II.A.2) *Équation mécanique*. On considère en première approximation que les actions sur l'équipage mobile se limitent à la force de Laplace. Déterminer l'équation mécanique du haut-parleur régissant le mouvement de l'équipage mobile sur l'axe Oz, en utilisant les variables $\underline{V}$ et $\underline{i}$.

II.A.3) Établir les expressions

$$\underline{H} = \frac{\underline{V}}{\underline{u}} = \underline{H}_0 \frac{1}{(1 + j\omega/\omega_c)} \qquad \underline{Y} = \frac{\underline{i}}{\underline{u}} = \underline{Y}_0 \frac{j\omega/\omega_c}{(1 + j\omega/\omega_c)} \qquad (5)$$

et donner la valeur littérale de $\underline{H}_0$, $\underline{Y}_0$ et ω_c.

II.A.4) Exprimer l'intensité sonore en un point de l'axe de cote z en fonction de ρ_0, c, S, z, Π_0, ω, $|\underline{H}|$ et $|\underline{u}|$. Pourquoi est-il souhaitable de travailler à des pulsations très supérieures à ω_c ? **Dans toute la suite, sauf exception signalée, on suppose** $\omega \gg \omega_c$ **.**

II.A.5) Donner les expressions simplifiées de $\underline{H}$ et $\underline{Y}$, que l'on notera respectivement $\underline{H}'$ et $\underline{Y}'$.

II.B - Directivité

II.B.1) Dans les conditions de champ lointain, on considère un point M' tel que l'angle entre OM' et Oz soit égal à θ. S'il existe, quel est (approximativement) le plus petit angle θ pour lequel on observe un minimum de diffraction ? En déduire une condition pour que le rayonnement d'un haut-parleur ne s'annule dans aucune direction. Pour quelles fréquences cette condition est-elle vérifiée pour le haut-parleur de référence ?

II.B.2) En fait, pour $f \cong 0,8\ \mathrm{kHz}$, le rayonnement du haut-parleur de référence est isotrope dans le demi-espace $z > 0$. Pourquoi les haut-parleurs d'aigus sont-ils si petits ?

II.C - Sensibilité

II.C.1) Exprimer $\mathcal{P}_e$, puissance électrique moyenne reçue par le haut-parleur, en fonction de R et $|\underline{u}|$.

II.C.2) La sensibilité σ d'un haut-parleur est définie comme l'intensité sonore à 1 mètre sur l'axe, pour une puissance électrique fournie $\mathcal{P}_e = 1\ \mathrm{W}$. On note σ_0 la valeur de σ dans le cadre de cette modélisation. Exprimer σ_0 en fonction de ρ_0, c, S, m, $|\Pi_0|$ et ω_c, toutes les grandeurs étant exprimées en unités du S.I.

II.C.3) Application numérique : on a mesuré $m = 2,5\ \mathrm{g}$, calculer $f_c = \omega_c/2\pi$ et commenter.

II.D - Rendement

II.D.1) En supposant, comme dans la partie I.C - , l'onde plane et uniforme au voisinage immédiat de la membrane, calculer la puissance $\mathcal{P}_+$ rayonnée dans le demi-espace $z > 0$ par le haut-parleur, en fonction de ρ_0, c, S et $|\underline{V}|$.

II.D.2) En déduire le rendement $\eta = \mathcal{P}_+/\mathcal{P}_e$ en fonction de ρ_0, c, S, m, ω et ω_c.

II.D.3) Application numérique : calculer η pour $f = 4,4\ \mathrm{kHz}$. Commenter.

II.D.4) La puissance $\mathcal{P}_+$ peut être considérée comme égale à $\Pi_z \Sigma$, Σ étant la surface d'une calotte sphérique d'axe Oz de centre O, de rayon z, vue de O sous l'angle solide $\Omega = 2\pi(1-\cos\theta)$ et Π_z ayant la valeur $\Pi(0,0,z)$. Exprimer Σ en fonction de λ, S. En déduire l'expression de θ (en radians) en fonction de λ et de a pour les fréquences très élevées. Application : calculer θ (en degrés) pour $f_M = 8\ \mathrm{kHz}$. Pourquoi le rendement du haut-parleur diminue-t-il lorsque la fréquence augmente ?

Partie III — Enceintes acoustiques

On s'intéresse dans cette partie à la restitution des sons graves, donc à l'étude du comportement aux fréquences les plus basses $(<100\ \mathrm{Hz})$. Le déplacement de la membrane étant plus important en basses fréquences (cf. I.C.6), les haut-parleurs de basses ont de plus un saladier ajouré, pour éviter la compression de l'air entre ce saladier et la membrane. Le haut-parleur rayonne alors par ses deux faces. On supposera pour simplifier que les deux faces de la membrane ont même surface.

III.A - Le problème des basses fréquences

III.A.1) On place un haut-parleur contre un mur perpendiculaire à Oz en fixant son aimant sur le mur. Montrer, en précisant bien le rôle du mur, que les ondes émises par les faces avant et arrière de la membrane interfèrent de façon destructive.

III.A.2) On peut résoudre ce problème en plaçant le haut-parleur dans une enceinte acoustique fermée. Quelle propriété doivent avoir les parois ?

III.A.3) Pourquoi les haut-parleurs de basses sont-ils généralement grands ?

III.B - Modélisation

On affine dans cette partie le modèle de la partie II.A - , dont on reprend les notations (les valeurs numériques ne sont bien sûr plus valables). L'amplitude des oscillations de la membrane augmentant en basse fréquence, on doit rajouter une force de rappel à la position d'équilibre proportionnelle au déplacement de la membrane $\boldsymbol{F}_1 = -k_1\xi\boldsymbol{u}_z$, due aux suspensions latérales. On se place de nouveau en régime sinusoïdal.

III.B.1) Donner la nouvelle équation mécanique du système avec les variables $\underline{i}$ et $\underline{V}$. Dans cette question, exceptionnellement, on ne fait pas d'hypothèse en ce qui concerne ω_c. Donner la nouvelle fonction de transfert $\underline{H}_1 = \underline{V}/\underline{u}$ en fonction de B, l, ω, ω_c et $\omega_1 = \sqrt{k_1/m}$.

III.B.2) On reprend l'hypothèse $\omega \gg \omega_c$ et on suppose également que la condition $\omega_1 \gg \omega_c$ est remplie. De plus, le modèle adopté, négligeant divers phénomènes dissipatifs, ne peut donner les valeurs correctes de $\underline{H}_1 = \underline{V}/\underline{u}$ ou de $\underline{Y}_1 = \underline{i}/\underline{u}$ pour $\omega \cong \omega_1$: ce cas est donc exclu de l'étude. Montrer que dans ces conditions, $\underline{H}_1$ se simplifie et s'exprime en fonction de $\underline{H}'$, ω et ω_1, et que $\underline{Y}_1 \cong 1/R$.

III.B.3) Montrer que $\sigma = \sigma_0$ pour $\omega \gg \omega_1$. En déduire l'expression de σ en fonction de σ_0, ω_1 et ω pour $\omega_c \ll \omega < \omega_1$. Tracer l'allure du diagramme donnant σ en fonction de $\log(\omega/\omega_1)$; préciser les pentes des asymptotes.

III.C - Influence de l'enceinte

On place le haut-parleur dans une enceinte acoustique. Une force de rappel supplémentaire $\boldsymbol{F'}_1 = -k'_1 \xi \boldsymbol{u}_z$ apparaît alors, due à la compression adiabatique de l'air emprisonné dans l'enceinte. On note V_0 le volume de l'enceinte, S la surface de la membrane, χ le coefficient de compressibilité adiabatique de l'air. On suppose $|\xi| S \ll V_0$.

III.C.1) Exprimer k'_1 en fonction de S, χ et V_0.

III.C.2) Pour des questions d'encombrement, on choisit V_0 tel que $k'_1 = k_1$. Cette condition sera supposée réalisée dans toute la suite. Donner la nouvelle pulsation de coupure ω'_1 en fonction de ω_1.

III.D - Enceinte "Bass-Reflex"

Pour améliorer les qualités du dispositif on peut utiliser une enceinte de type "Bass-Reflex", proposée dès 1930 (Thuras). Le principe (figure 3) est de faire communiquer l'enceinte avec l'extérieur par un évent, tuyau cylindrique creux de longueur d et de section S' :

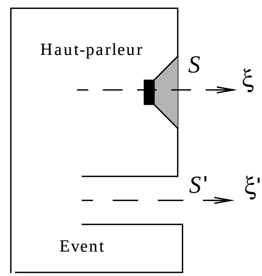


Figure 3

On admet que l'air compris dans l'évent se comporte comme un piston indéformable, de masse $m' = \rho_0 S' d$, dont on repère la position par la variable ξ', nulle au repos. Ce piston forme avec la membrane du haut-parleur une paire d'oscillateurs couplés. On suppose de plus que $S' d \ll V_0$.

III.D.1) Mettre le système en équations sous la forme :

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = -\omega_1^2 2\xi + \beta\xi' - Bl\frac{i}{m} \tag{6}$$

$$\alpha\frac{d^2\xi'}{dt^2} = -\omega_1^2(\beta\xi + \beta^2\xi') \tag{7}$$

en donnant la valeur de α et β en fonction de m, m', S et S'.

III.D.2) Donner les pulsations propres de chaque oscillateur seul (l'autre étant bloqué). Pour un couplage fort entre ces deux oscillateurs, on impose que ces pulsations soient égales. En déduire une relation entre α et β.

III.D.3) Déterminer alors les pulsations propres du système {haut-parleur + évent}, notées ω_+ et ω_-, avec $\omega_+ > \omega_-$, pulsations pour lesquelles, en régime libre, $\xi(t)$ et $\xi'(t)$ sont en phase ou en opposition de phase. Calculer le rapport ξ'/ξ en fonction de α pour chacun de ces modes propres.

III.D.4) Application numérique : on donne, pour un haut-parleur de basses : $S = 500\ \text{cm}^2$, $m = 40\ \text{g}$. Calculer S' si $d = 10\ \text{cm}$.

III.D.5) Les trois courbes C_1, C_2 C_3 de la figure 4 représentent les variations de $\sigma - \sigma_0$ en fonction de $\log(\omega/\omega_1)$ pour les trois modélisations adoptées dans le problème où tous les phénomènes dissipatifs n'ont pas été pris en compte. Identifier ces trois courbes. La courbe relative à l'enceinte "Bass-Reflex" n'est pas encore satisfaisante. Comment peut-on l'améliorer ? Proposer une modification physique de l'enceinte susceptible d'aboutir à ce résultat.

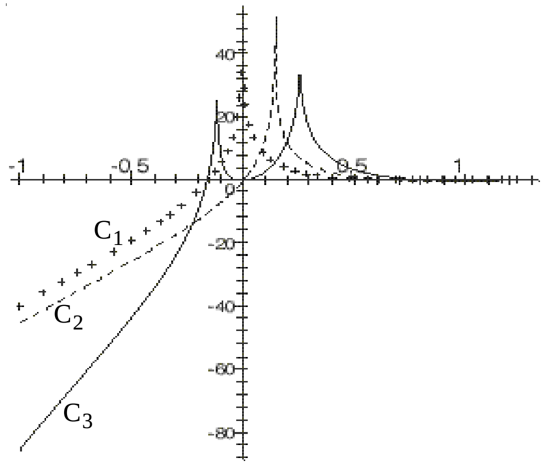


Figure 4

••• FIN •••