MATHÉMATIQUES I

Définitions

Si f est une fonction de classe C^{∞} définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ et à valeurs réelles, on notera, pour $p \geq 1$, $f^{p} = f \circ f .. \circ f$ p fois, fonction définie sur le sous-domaine de Ω défini par $\{x \in \Omega |\ f(x) \in \Omega,\ f^{2}(x) \in \Omega, \ldots, f^{p-1}(x) \in \Omega\}$. On appelle p-cycle de f un ensemble de p éléments $\{x_0, \ldots x_{p-1}\} \subset \Omega$ tel que $f(x_0) = x_1$ $, \ldots, f(x_{p-2}) = x_{p-1}, f(x_{p-1}) = x_0$. On appelle multiplicateur du cycle la quantité

$$(f^{p})'(x_0) = f'(x_0)f'(x_1)\ldots f'(x_{p-1}).$$

Un point $x \in \Omega$ est dit p-périodique s'il est élément d'un p-cycle ; un point 1 - périodique est encore appelé point fixe. Le multiplicateur d'un point périodique x_0 est alors le multiplicateur du cycle le contenant, qui n'est autre que le multiplicateur de x_0 comme point fixe de f^{p}. Le cycle (ou le point p-périodique) sera dit attractif, super attractif, indifférent ou répulsif suivant que la valeur absolue de son multiplicateur est strictement inférieure à 1, égale à 0, égale à 1 ou strictement supérieure à 1.

On pourra être amené à utiliser un théorème de fonctions implicites dans $\mathbb{R}^2$.

On pourra alors admettre le résultat suivant :

Théorème : *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $F:\Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, et (x_0, y_0) un point de Ω, tels que*

$$F(x_0,y_0) = 0, \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0 .$$

Alors il existe ε, $\eta > 0$ tels que si on pose $I =]x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon[$, $J =]y_0 - \eta, y_0 + \eta[$, l'ouvert $V = I \times J$ est inclus dans Ω et il existe une fonction $g\ :\ ]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\to]y_0 - \eta, y_0 + \eta[$ de classe C^1 telle que :

$$\forall (x,y) \in V, F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x).$$

Le thème général du problème est l'étude globale de la méthode de Newton appliquée aux polynômes.

Filière MP

Partie I - La méthode de Newton pour les polynômes réels

Soit $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale non constante et $\Omega = \{x \in \mathbb{R} \mid P'(x) \neq 0\}$. Si $x \in \Omega$, on définit $N_P(x)$ comme étant l'abscisse de l'intersection de la tangente en $(x, P(x))$ au graphe de P avec l'axe des x.

I.A - Montrer que :

$$\forall x \in \Omega, N_P(x) = x - \frac{P(x)}{P'(x)}.$$

I.B -

I.B.1) Si $x \in \Omega$, calculer $N'_P(x)$.

I.B.2) Soit a un nombre réel.

Montrer que si $P(a) = 0$, $P'(a) \neq 0$ alors a est un point fixe super attractif de N_P. Si a est un zéro d'ordre $p \geq 2$ de P montrer que N_P peut se prolonger par continuité en a qui devient un point fixe attractif de N_P de multiplicateur $1 - 1/p$.

Si $x \in \Omega$, on dira que la suite de Newton de x par P est bien définie si l'on peut définir une suite (x_n) telle que $x_0 = x$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in \Omega \text{ et } x_{n+1} = N_P(x_n).$$

Dans ce cas, cette suite (x_n) sera la suite de Newton de x par P.

I.C - Montrer que si la suite de Newton de x par P est bien définie et converge vers $a \in \mathbb{R}$ alors $P(a) = 0$.

I.D - Soit réciproquement $a \in \mathbb{R}$ un zéro de P.

I.D.1) Montrer l'existence de $\varepsilon > 0$ tel que si $|y - a| < \varepsilon$ alors la suite de Newton de y par P est bien définie et converge vers a.

On appelle $I(a)$ le plus grand intervalle contenant a et formé de points dont la suite de Newton par P converge vers a.

I.D.2) Montrer que c'est un intervalle ouvert ; on l'appelle le bassin immédiat de a.

I.E -

I.E.1) On suppose que P a au moins deux racines réelles. Soit a^- le plus petit zéro de P ; on suppose que ξ, le plus petit zéro de P' vérifie $\xi > a^-$ et que P'' ne s'annule pas sur $]-\infty, \xi[$. Montrer que le bassin immédiat de a^- est égal à $]-\infty, \xi[$.

I.E.2) On suppose que le bassin immédiat du zéro a de P est de la forme $]\alpha, \beta[$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Montrer successivement que $N_P(]\alpha, \beta[) \subset]\alpha, \beta[$, que $P(\alpha)P'(\alpha)P(\beta)P'(\beta) \neq 0$, et enfin que $N_P(\alpha) = \beta$, $N_P(\beta) = \alpha$. Ce 2 - cycle peut-il être attractif ?

I.F - Les hypothèses de la question I.E.2 étant toujours vérifiées, montrer que le bassin immédiat de a contient un zéro de P''.

I.G - On suppose P de degré $d \geq 2$ possédant d zéros distincts. Montrer que N_P attire tout zéro de P'' vers un zéro de P.

Partie II - Étude algébrique

Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré d (on note $\mathrm{d}^\circ(P) = d$). Dans cette partie la dérivation est à prendre au sens de la dérivation formelle des polynômes ou plus généralement des fractions rationnelles et N_P est la fraction rationnelle

$$N_P(X) = X - \frac{P(X)}{P'(X)}.$$

II.A - Montrer que si P a d zéros distincts alors $R = N_P$ vérifie

$$(*) \quad \begin{cases} R = \dfrac{Q}{S},\ Q, S \in \mathbb{C}[X],\ PGCD(Q, S) = 1,\ \mathrm{d}^\circ(Q) = d,\ \mathrm{d}^\circ(S) = d - 1 \\ \text{et } R \text{ possède } d \text{ points fixes super attractifs} \end{cases}$$

(Un point fixe super attractif de R est un point $z \in \mathbb{C}$ tel que $R(z) = z$, $R'(z) = 0$).

II.B - Soit réciproquement R une fraction rationnelle vérifiant $(*)$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré d, possédant d zéros distincts, tel que $R = N_P$.

II.C - Deux fractions rationnelles f, g sont dites semblables s'il existe une similitude $T(z) = az + b$ ($a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$) telle que si D, D' désignent les domaines de définition de f, g (c'est-à-dire le complémentaire dans $\mathbb{C}$ de l'ensemble des pôles) alors $T(D) = D'$ et

$$\forall z \in D',\ f(z) = T^{-1} \circ g \circ T(z).$$

Si $a, b \in \mathbb{C}, a \neq 0$ et si $T(z) = az + b$ montrer que $N_{P \circ T}$ est semblable à N_P.

II.D - Déterminer N_P pour $P(X) = X^2$, $P(X) = X^2 - 1$: montrer que si P est un polynôme de degré 2 alors N_P est semblable à $z \mapsto \frac{z}{2}$ ou bien à $z \mapsto \frac{z}{2} + \frac{1}{2z}$.

II.E - Pour $m \in \mathbb{C}$ on définit

$$P_m(z) = z^3 + (m-1)z - m = (z-1)(z^2 + z + m), N_m(z) = N_{P_m}(z)$$

Montrer que si P est un polynôme de degré 3 alors soit N_P est semblable à $z \mapsto \frac{2z}{3}$ soit il existe $m \in \mathbb{C}$ tel que N_P est semblable à N_m.

II.F - Quel est l'intérêt des résultats des deux questions précédentes pour l'étude des suites de Newton par les polynômes de degré ≤ 3 ?

Partie III - Étude analytique du cas cubique réel

Dans cette partie on suppose $m \in \mathbb{R}$, on garde les notations du II.E et on s'intéresse au comportement des suites de Newton des nombres réels par P_m.

III.A -

III.A.1) Montrer que P_m a trois zéros (complexes) distincts si et seulement si $m \neq -2$, $m \neq 1/4$.

III.A.2) On suppose $m > 1$: montrer que la suite de Newton de tout réel x par P_m est définie et converge vers un réel à préciser.

III.B -

III.B.1) Montrer que si $m' < 1/4$, $m' \neq -2$ alors $P_{m'}$ possède trois zéros réels distincts, soient :

$$1\ ,\ a_{m'} = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4m'}}{2}\ ,\ b_{m'} = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4m'}}{2}.$$

Si de plus $m' < 0$, montrer qu'il existe $m \in]0, 1/4[$ tel que $N_{m'}$ soit semblable à N_m.

III.B.2) On supposera désormais dans cette partie que $m \in [0, 1/4[$. P_m possède alors trois zéros réels distincts, soient :

$$1\ ,\ a_m = \frac{-1 + \sqrt{1 - 4m}}{2}\ ,\ b_m = \frac{-1 - \sqrt{1 - 4m}}{2}.$$

III.B.3) On pose $x_0^{\pm} = \pm\sqrt{\frac{1-m}{3}}$ et on désigne par $]\alpha(m), \beta(m)[$ le bassin immédiat de a_m. Montrer que la fonction $x \mapsto |N'_m(x)|$ est strictement décroissante sur $]x_0^-, a_m[$ et strictement croissante sur $]0, x_0^+[$.

III.B.4) Montrer que la fonction $M_m = N_m \circ N_m$ est définie sur un intervalle $]x_1^-, x_1^+[\subset]x_0^-, x_0^+[$ où $N_m(x_1^-) = x_0^+$, $N_m(x_1^+) = x_0^-$.

On désigne par ξ^-, ξ^+ le plus petit et le plus grand zéro de M'_m. Montrer que la fonction M'_m est strictement décroissante sur $]x_1^-, \xi^-[$ et strictement croissante sur $]\xi^+, x_1^+[$.

III.B.5) Montrer que l'intervalle $[\xi^-, \xi^+]$ est inclus dans le bassin immédiat de a_m.

III.B.6) Déduire de III.B.4 et III.B.5 que $\{\alpha(m), \beta(m)\}$ est le seul 2 - cycle de N_m.

III.B.7) Montrer que $\alpha(0) = -\beta(0)$ et en déduire que $\alpha(0) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

III.B.8) On pose $F(m, x) = M_m(x) - x$. Si u est un réel, un développement limité à l'ordre 1 de la fonction

$$m \mapsto F\left(m, -\frac{1}{\sqrt{5}} + um\right)$$

peut être obtenu grâce à un logiciel de calcul formel. On trouve :

$$\left(35u + \frac{25 - 7\sqrt{5}}{2}\right)m + o(m).$$

En déduire, avec toutes les justifications nécessaires, un développement limité à l'ordre 1 de α en 0.

III.C -

III.C.1) Montrer qu'il existe une et une seule valeur m_0 de $m \in \mathbb{R}$ telle que 0 soit 2-périodique pour N_m. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près par défaut de m_0 en indiquant l'algorithme utilisé.

III.C.2) Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que si $|m - m_0| < \eta$ alors N_m admet un cycle attractif d'ordre 2 qui attire 0.

••• FIN •••
