MATHÉMATIQUES II

Le but du problème est d'établir certains résultats sur les polytopes de $\mathbb{R}^n$ (voir définition plus loin) notamment lorsque $n = 2$.

- Dans le problème on considère à la fois la structure vectorielle et la structure affine de $\mathbb{R}^n$; ainsi les éléments de $\mathbb{R}^n$ pourront être considérés soit comme des vecteurs, soit comme des points, ce qui permettra d'utiliser les notations classiques résultant de ce double point de vue :

$$\overrightarrow{AB} = B - A \text{ ; } O = \vec{0} \text{ (origine) ; } \overrightarrow{OM} = M - O = M \text{, etc...}$$

- L'espace $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique. Il est orienté (si nécessaire) par la base canonique, considérée comme base orthonormale directe. Ainsi, le produit scalaire s'écrit :

$$(U|V) = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i \text{, si } U = (u_1, \ldots, u_n) \text{ et } V = (v_1, \ldots, v_n).$$

La norme de U est notée

$$\|U\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2} \ ;$$

la longueur du segment $[A, B]$ est, par définition, la distance euclidienne entre A et B, c'est-à-dire $\|\overrightarrow{AB}\|$.

- On rappelle qu'une application affine de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même est une application f, telle qu'il existe $A \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ pour lesquels,

$$\forall M \in \mathbb{R}^n,\ f(M) = f(A) + \varphi(\overrightarrow{AM}).$$

Dans ce cas, φ est appelée la partie linéaire de f.

Définitions

- **Combinaison affine, combinaison convexe** : soient $M_1, \ldots, M_p$ p points de $\mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ p réels **de somme égale** à 1, on appelle combinaison affine

Filière PSI

des points $M_i(\lambda_i)$ le point $M = \lambda_1 M_1 + \ldots + \lambda_p M_p$ barycentre des points M_i affectés des coefficients λ_i, ce qui se traduit vectoriellement par la relation

$$\overrightarrow{OM} = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \overrightarrow{OM_i}.$$

Lorsque les λ_i sont tous positifs $(\forall i, \lambda_i \geq 0)$, on parle de combinaison convexe.

- **Ensemble convexe** : soit C un sous-ensemble non vide de points de $\mathbb{R}^n$. On dit que C est convexe s'il est stable par combinaison convexe. Cela signifie que pour tout p de $\mathbb{N}^*$, pour tout $p-$uplet $(M_1, \ldots, M_p)$ de points de C et pour tout $p-$uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ de réels positifs, de somme égale à 1 on a

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i M_i \in C.$$

- **Polytope** : on appelle polytope l'ensemble des combinaisons convexes d'une partie finie $\{M_1, \ldots, M_p\}$ de $\mathbb{R}^n$ (p entier $p \geq 1$). Cet ensemble, noté $conv(M_1, \ldots, M_p)$, est défini par

$$conv(M_1, \ldots, M_p) = \left\{ M \in \mathbb{R}^n \middle| \exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) \in \mathbb{R}_+^p, \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 \text{ et } M = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i M_i \right\}$$

Par exemple $conv(M_1, M_2)$ est le segment $[M_1, M_2]$.

  - en dimension 2, on parle de polygone convexe,
  - en dimension 3, on parle de polyèdre convexe.

- **Point extrémal** : soit C un sous-ensemble convexe de $\mathbb{R}^n$, on dit qu'un point $A \in C$ est extrémal si $C \backslash \{A\}$ est encore convexe.

Partie I - Quelques propriétés des polytopes

I.A -

I.A.1) Montrer que tout segment de $\mathbb{R}$ est convexe.

I.A.2) Montrer que tout demi-plan fermé ou ouvert F de $\mathbb{R}^2$ est convexe. On rappelle qu'un demi-plan fermé, respectivement ouvert, de $\mathbb{R}^2$ peut être défini de la façon suivante :

$$\exists U \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}, \exists a \in \mathbb{R}, \left(M \in F \Leftrightarrow (\overrightarrow{OM} | U) < a \right).$$

respectivement

$$\exists U \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \ , \exists a \in \mathbb{R} \ , \left(M \in F \Leftrightarrow (\overrightarrow{OM} | \ U) < a \ \right).$$

I.A.3) Montrer que, si A est un ensemble non vide d'indices et $(C_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de convexes de $\mathbb{R}^n$ d'intersection non vide, alors

$$C = \bigcap_{\alpha \in A} C_\alpha \text{ est convexe.}$$

I.B - Soit C un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$, on suppose que

$$\forall (M,N) \in C^2 \ , \ [M,N] \subset C \ .$$

Montrer par récurrence sur p que toute combinaison convexe de p éléments de C appartient à C c'est-à-dire que

$$\forall (M_1,\ldots,M_p) \in C^p, \left(\forall (\lambda_1,\ldots,\lambda_p) \in \mathbb{R}_+^p \middle| \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 \right), \ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i M_i \in C \ .$$

En déduire une caractérisation d'un ensemble convexe.

I.C - Dans $\mathbb{R}^2$, on appelle triangle tout polygone convexe $conv(M_1,M_2,M_3)$ où M_1,M_2,M_3 sont trois points non alignés. On note F_1 le demi-plan fermé contenant le point M_1 et de frontière la droite M_2M_3. On définit de même, par permutation circulaire, les demi-plans F_2 et F_3.

I.C.1) Montrer que $conv(M_1,M_2,M_3) = F_1 \cap F_2 \cap F_3$ (on pourra commencer par prouver que, si $M = \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \lambda_3 M_3$, avec $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, alors $(M \in F_1 \Leftrightarrow \lambda_1 \geq 0)$).

I.C.2) Montrer que M_1 est un point extrémal de $conv(M_1,M_2,M_3)$.

I.D - Montrer que l'image d'un polytope par une bijection affine de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même est un polytope.

I.E - Soit $T = \{\lambda_1,\ldots,\lambda_p \in [0,1]^p \ \big| \ \lambda_1 + \ldots + \lambda_p = 1\}$.

I.E.1) Montrer que T est un compact de $\mathbb{R}^p$.

I.E.2) Soit $M_1,\ldots,M_p$ p points de $\mathbb{R}^n$, on définit l'application

$$f \ : \ (\lambda_1,\ldots,\lambda_p) \in \mathbb{R}^p \mapsto \lambda_1 M_1 + \ldots + \lambda_p M_p \in \mathbb{R}^n \ .$$

Dire rapidement pourquoi f est continue.

I.E.3) Montrer que tout polytope est compact.

I.E.4) En déduire que, dans $\mathbb{R}^2$, si une droite Δ coupe un polygone convexe P alors l'intersection est un segment, éventuellement réduit à un point.

I.F -

I.F.1) Soient P un polytope de $\mathbb{R}^n$ et F un demi-espace fermé contenant P défini par $F = \{M \in \mathbb{R}^n \mid (\overrightarrow{OM} \mid U) \leq \alpha\}$

où U est un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$ et α un réel. On suppose que M_1 est le seul point de P réalisant l'égalité $(\overrightarrow{OM_1} \mid U) = \alpha$. Montrer que, si P n'est pas réduit à $\{M_1\}$, alors M_1 est un point extrémal de P.

On admet que la réciproque est vraie, autrement dit que cette propriété est caractéristique des points extrémaux des polytopes.

I.F.2) Montrer que l'ensemble des points extrémaux du polytope, ensemble des combinaisons convexes des points $M_1, \ldots, M_p$, est un sous-ensemble de l'ensemble $\{M_1, \ldots, M_p\}$.

I.F.3) On appelle courbe des moments dans $\mathbb{R}^n$ la courbe définie par

$$t \in \mathbb{R} \mapsto M(t) = (t,\ t^2, \ldots, t^n).$$

- Préciser la courbe obtenue lorsque $n = 2$.
- Soit P le polytope, ensemble des combinaisons convexes des points $M(t_1), \ldots, M(t_p)$, où $t_1, \ldots, t_p$ sont p réels distincts. Montrer que les points extrémaux de P sont les points $M(t_1), \ldots, M(t_p)$.

Indication : on pourra prendre pour chaque point $M(t_i)$ le vecteur

$U_i = (2t_i, -1, 0, \ldots, 0)$, et pour demi-espace fermé $F_i = \left\{M \in \mathbb{R}^n \mid (\overrightarrow{OM} \mid U_i) \leq t_i^2\right\}$.

Partie II - Représentation complexe des endomorphismes de $\mathbb{R}^2$

On assimile le plan vectoriel euclidien $\mathbb{R}^2$ au corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes en identifiant tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ au nombre complexe $z = x + iy$.

II.A -

II.A.1) Soit $f : z \mapsto f(z)$ une application de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

- f est $\mathbb{R}$-linéaire,
- il existe des complexes α et β tels que $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = \alpha z + \beta \bar{z}$.

II.A.2) On considère une application $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{C}$ vers $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \alpha z + \beta \bar{z}$. Montrer que $det\ f = |\alpha|^2 - |\beta|^2$ et en déduire une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un automorphisme.

II.A.3) Exemple : donner l'écriture complexe de la réflexion vectorielle (i.e. la symétrie vectorielle orthogonale) f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, d'axe la droite vectorielle $\delta(\theta)$ d'angle polaire $\theta \in [\,0,\pi[$, c'est-à-dire de vecteur directeur $\vec{U}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$.

II.B -

II.B.1) Soit p un entier $p \geq 3$. Montrer que le sous-ensemble

$$H = \left\{ (z_1,\ldots,z_p) \in \mathbb{C}^p \middle| z_1 + \ldots + z_p = 0 \right\}$$

de $\mathbb{C}^p$ est un hyperplan vectoriel.

II.B.2) Soit ψ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^p$ défini par

$$\psi : (z_1, z_2, \ldots, z_p) \mapsto (z_2, \ldots, z_p, z_1).$$

On pose, pour tout k entier de $[0, p-1]$, $\Omega_k = (1, \omega^k, \omega^{2k}, \ldots, \omega^{(p-1)k})$, avec

$$\omega = e^{i\frac{2\pi}{p}}.$$

- Calculer ψ^p. En déduire que ψ est un automorphisme diagonalisable.
- Calculer $\psi(\Omega_k)$. Que dire du résultat obtenu ?

II.B.3) En déduire une base de l'hyperplan H.

II.C - On suppose, au cours de cette question, que le vecteur

$$V = (a_1, \ldots, a_p) \in \mathbb{C}^p$$

appartient à l'hyperplan H, autrement dit que $a_1 + \ldots + a_p = 0$.

II.C.1) Justifier l'existence et l'unicité de $(\lambda_1, \ldots, \lambda_{p-1}) \in \mathbb{C}^{p-1}$ tel que $V = \sum_{k=1}^{p-1} \lambda_k \Omega_k$.

II.C.2) Montrer que $\lambda_1 = \frac{1}{p} \sum_{r=1}^{p} \omega^{1-r} a_r$ et que $\lambda_{p-1} = \frac{1}{p} \sum_{r=1}^{p} \omega^{r-1} a_r$.

II.C.3) On suppose que, $|\lambda_1| = |\lambda_{p-1}|$ ce qui signifie que

$$(\exists \theta \in [\,0, 2\pi[), \lambda_{p-1} = e^{i\theta}\lambda_1.$$

On pose :

$$\forall r \in [1, p] \cap \mathbb{N}, \alpha_r = \sin\left[(r-1)\frac{2\pi}{p} - \frac{\theta}{2}\right].$$

Montrer que :

$$\sum_{r=1}^{p} \alpha_r = 0 \text{ et que } \sum_{r=1}^{p} \alpha_r a_r = 0.$$

Partie III - Étude des familles $\pi-$rationnelles de droites vectorielles

Toutes les droites considérées dans cette partie sont des droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$

On rappelle que, pour tout élément θ de $\mathbb{R}$, on note $\delta(\theta)$ la droite vectorielle d'angle polaire $\theta \in [0, \pi[$ du plan vectoriel $\mathbb{R}^2$. Soit p un entier $p \geq 1$. Une famille $\mathcal{F} = (d_1, \ldots, d_p)$ de droites, est dite $\pi-$rationnelle s'il existe un automorphisme f de $\mathbb{R}^2$ tel que

$$\{d_1, \ldots, d_p\} = \left\{ f\left(\delta\left(\frac{k\pi}{p}\right)\right) \middle| \, k \in [0, p-1] \right\}.$$

III.A - Exemples de familles de droites $\pi-$rationnelles.

III.A.1) Montrer qu'une famille (d_1) réduite à une droite ainsi qu'une famille (d_1, d_2) constituée de deux droites distinctes sont $\pi-$rationnelles.

III.A.2) Montrer qu'une famille (d_1, d_2, d_3) constituée de trois droites deux à deux distinctes est elle aussi $\pi-$rationnelle.

III.B - Existence de familles de droites non $\pi-$rationnelles.

Soit $\mathcal{F} = (d_1, d_2, d_3, d_4)$ une famille constituée de quatre droites deux à deux distinctes.

III.B.1) Pour tout $j \in [1, 4]$ on note U_j un vecteur directeur de la droite d_j. Montrer que le rapport

$$\mathcal{R} = \frac{\det(U_1, U_3) \cdot \det(U_2, U_4)}{\det(U_1, U_4) \cdot \det(U_2, U_3)}$$

ne dépend pas du choix des vecteurs directeurs U_j. Il est recommandé, pour la suite du problème, de les choisir unitaires en les écrivant $U_j = (\cos\theta_j, \sin\theta_j)$. Ce rapport sera noté $\mathcal{R}(\mathcal{F})$.

III.B.2) Soit f un automorphisme de $\mathbb{R}^2$. On pose :

$$f(\mathcal{F}) = (f(d_1), f(d_2), f(d_3), f(d_4)).$$

Montrer que $\mathcal{R}(f(\mathcal{F})) = \mathcal{R}(\mathcal{F})$.

III.C -

III.C.1) Justifier l'existence, pour tout $k \in \mathbb{N}$, d'un polynôme T_k à coefficients dans $\mathbb{Z}$ tel que $\forall\theta \in \mathbb{R}, \cos(k\theta) = T_k(\cos\theta)$.

III.C.2) Soit p un entier, $p \geq 4$. On considère une famille $\mathcal{D} = (d_1, d_2, d_3, d_4)$ de quatre droites deux à deux distinctes extraites d'une famille $\pi-$rationnelle $\mathcal{F}$ de p droites. Montrer l'existence d'une fraction rationnelle G à coefficients dans le corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, c'est-à-dire appartenant à $\mathbb{Q}(X)$, telle que l'on ait

$$R(D) = G\left(\cos\frac{\pi}{p}\right).$$

III.C.3) On admet l'existence de nombres réels n'appartenant pas à l'ensemble

$$\mathcal{E} = \bigcup_{q \geq 4}\left\{G\left(\cos\frac{\pi}{q}\right) \middle| G \in \mathbb{Q}(X)\right\}.$$

Montrer que, pour tout entier $p \geq 4$, il existe des familles non π– rationnelles de p droites.

Partie IV - Identification par des rayons d'un polygone convexe.

Dans toute cette partie on se place dans $\mathbb{R}^2$.

Soient P un polygone convexe de $\mathbb{R}^2$ et θ un réel de $[0, \pi[$. Pour tout réel x, on note $\Delta_{\theta,x}$ la droite affine de vecteur directeur d'affixe $e^{i\theta}$ passant par le point d'affixe $xie^{i\theta}$. On rappelle (cf. I.E.4. que l'intersection $\Delta_{\theta,x} \cap P$, lorsqu'elle est non vide, est un segment. On note $l(\Delta_{\theta,x} \cap P)$ sa longueur, que l'on prend nulle lorsque cette intersection est vide. On définit ensuite l'application

$$L_{\theta,\ P} : x \in \mathbb{R} \mapsto l(\Delta_{\theta,x} \cap P) \in \mathbb{R}.$$

On considère deux polygones convexes P et P' de $\mathbb{R}^2$.

- Soit $\delta(\theta)$ une droite vectorielle fixée, où $\theta \in [0, \pi[$. P et P' sont dits $\delta(\theta)$– identifiables si les applications $L_{\theta,\ P}$ et $L_{\theta,\ P'}$ sont égales.
- Soit $F = (\delta(\theta_1), \ldots, \delta(\theta_p))$ une famille de p droites vectorielles, avec $p \geq 1$. P et P' sont dits F– identifiables si pour tout $i \in [1, p]$ les polygones P et P' sont $\delta(\theta_i)$– identifiables, c'est-à-dire si

$$(\forall i \in [1, p]),\ L_{\theta_i,\ P} = L_{\theta_i,\ P'}.$$

L'objectif de la partie IV - est de montrer qu'une famille convenablement choisie de quatre droites vectorielles suffit pour savoir si deux polygones convexes sont distincts.

IV.A -

IV.A.1) Trouver l'équation polaire de la droite $\Delta_{\theta,x}$.

IV.A.2) Illustrer par un dessin la définition de la fonction $L_{\theta,\ P}$.

IV.B - Le but de cette question est de montrer que si F est une famille de droites vectorielles permettant de savoir si deux polygones convexes P et P' sont distincts alors F n'est pas π– rationnelle.

IV.B.1) Montrer que si f est une bijection affine de $\mathbb{R}^2$ de partie linéaire φ, et si P et P' sont des polygones convexes $\delta(\theta)$– identifiables, alors les polygones convexes $f(P)$ et $f(P')$ sont $\varphi(\delta(\theta))$ – identifiables.

Dans toute la suite de cette question, soit p un entier, $p \geq 3$. On pose $\omega = e^{i\frac{2\pi}{p}}$.

Le symbole $[A]$ désignant l'affixe complexe du point A de $\mathbb{R}^2$, on note $A_1,\ldots,A_p$ et $B_1,\ldots,B_p$ les points de $\mathbb{R}^2$ tels que

$$(\forall k \in [1, p])\ [A_k] = \omega^k,\ [B_k] = e^{i\pi/p}\omega^k,$$

et on considère les deux polygones convexes distincts $P = conv(A_1,\ldots,A_p)$ et $P' = conv(B_1,\ldots,B_p)$.

IV.B.2) Prouver que pour tout $q \in [1, p]$ la réflexion affine σ_q d'axe la droite Δ_q passant par O et de direction $\delta_q = \delta\left((2q-1)\frac{\pi}{2p}\right)$ vérifie $\sigma_q(P') = P$.

IV.B.3) Exhiber une famille F de p droites vectorielles telle que les polygones convexes P et P' soient F– identifiables.

IV.B.4) En déduire que, pour toute famille π– rationnelle $G = (d_1,\ldots,d_m)$ de m droites vectorielles, il existe au moins deux polygones convexes distincts Q et Q' qui soient G– identifiables.

IV.C - Réponse au problème de la reconnaissance de deux polygones convexes distincts P et P'.

Soit F une famille de p droites vectorielles distinctes avec $p \geq 4$. On admet que s'il existe deux polygones convexes distincts F– identifiables, alors F est nécessairement extraite d'une famille π– rationnelle.

Soit $D = (d_1,d_2,d_3,d_4)$ une famille de quatre droites vectorielles distinctes telle que $R(D) \in \mathbb{R} \backslash \mathcal{E}$ avec

$$\mathcal{E} = \bigcup_{q \geq 4} \left\{ G\left(\cos\frac{\pi}{q}\right) \middle|\ G \in \mathbb{Q}(X) \right\}$$

ce qui est possible d'après la question III.C.3.

Montrer que si P et P' sont des polygones convexes D– identifiables alors on a $P = P'$.

••• FIN •••
