MATHÉMATIQUES II

Dans tout le problème, M_2 désigne le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées 2×2 à coefficients réels dont l'élément nul est noté 0, et S_2 le sous-espace vectoriel de M_2 formé des matrices symétriques.

Si A et B sont deux éléments de M_2, le produit de A par B est noté AB, la matrice transposée de A est notée ${}^tA$.

D'autre part, on note Ψ l'application de $\mathbb{R}^4$ dans M_2 qui à $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ fait correspondre la matrice

$$\psi(a, b, c, d) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On rappelle aussi que Ψ est linéaire et bijective.

Partie I -

Pour tout élément A de M_2, s'écrivant $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, on définit la trace de A par :

$$\mathrm{tr}(A) = a + d$$

I.A - *Dans cette question, on définit une structure euclidienne sur M_2.*

À toute matrice M de M_2, on associe sa trace $\mathrm{tr}(M)$: on définit ainsi l'application trace notée tr de M_2 dans $\mathbb{R}$.

I.A.1) Montrer que l'application trace est linéaire de M_2 dans $\mathbb{R}$.

Comparer pour $(A,B) \in M_2 \times M_2$, les réels $\mathrm{tr}(AB)$ et $\mathrm{tr}(BA)$, puis $\mathrm{tr}(A)$ et $\mathrm{tr}({}^tA)$.

I.A.2) On pose

$$\forall (A, B) \in M_2 \times M_2, \langle A|B \rangle = \mathrm{tr}(A\,{}^tB)$$

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur M_2.

Pour toute la suite du problème, on pose :

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, E_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On note également $I = E_1 + E_2$ l'élément unité de M_2.

Filière TSI

I.B - Montrer que la famille $\mathcal{B}_0 = (E_1, E_2, E_3, E_4)$ est une base orthonormée de M_2 pour ce produit scalaire.

En déduire une base orthonormée de S_2.

I.C - Étude de la forme « déterminant » sur M_2

À toute matrice M de M_2, on associe son déterminant $\det(M)$: on définit ainsi une application notée $\det$ de M_2 dans $\mathbb{R}$.

I.C.1) On pose

$$M = \sum_{i=1}^{4} x_i E_i \in M_2 .$$

Exprimer $\det(M)$ en fonction de (x_1, x_2, x_3, x_4).

I.C.2) Montrer que $\det \circ \Psi$ est une forme quadratique sur $\mathbb{R}^4$, dont on précisera la matrice dans la base $b = (e_1, e_2, e_3, e_4)$, avec :

$$e_1 = (1, 0, 0, 0),\ e_2 = (0, 0, 0, 1),\ e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, 1, 0),\ e_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1, 0).$$

Partie II -

On se propose dans cette partie de déterminer les applications q de M_2 dans $\mathbb{R}$ telles que $q \circ \Psi$ soit une forme quadratique non nulle sur $\mathbb{R}^4$ et qui vérifient

$$q(MN) = q(M)q(N) \qquad (1)$$

pour tout couple de matrices $(M, N) \in M_2 \times M_2$.

II.A - Donner un exemple d'application q solution du problème exposé au début de la partie II.

Dans les questions suivantes de la partie II, q est une application de M_2 dans $\mathbb{R}$ telle que $q \circ \Psi$ est une forme quadratique non nulle sur $\mathbb{R}^4$ et qui vérifie (1).

II.B - Calculer $q(0)$, $q(I)$.

II.C - Montrer que si le rang de M est égal à 2, $q(M)$ est non nul.

II.D - *On suppose dans cette seule question que $M \in M_2$ est une matrice de rang égal à 1. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique $B_1 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ de $\mathbb{R}^2$ est égale à M.*

II.D.1) Montrer qu'il existe $B_2 = (u, v)$ une base de $\mathbb{R}^2$ telle que le noyau de f (noté $\ker f$) soit engendré par v (c'est-à-dire $\ker f = \mathrm{Vect}(v)$), puis qu'il existe un vecteur $w \in \mathbb{R}^2$ tel que $B_3 = (w, f(u))$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.

En déduire que l'on peut trouver deux matrices P et Q inversibles telles que

$$PMQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

II.D.2) En déduire que $q(M) = 0$.

II.E - Expliquer pourquoi on peut ainsi conclure que M est une matrice inversible si et seulement si $q(M) \neq 0$

II.F - Soit M une matrice fixée de M_2 que l'on supposera trigonalisable, dont les valeurs propres sont notées λ_1 et λ_2 (éventuellement confondues). On pose

$$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ f(\lambda) = \det(M - \lambda I),\ g(\lambda) = q(M - \lambda I)$$

On notera d'autre part φ l'application de $M_2 \times M_2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(M, N) = \frac{1}{4}\Big(q(M+N) - q(M-N) \Big).$$

Par extension des notions vues en cours, si l'application q est dite « forme quadratique » sur M_2 alors φ est dite « forme polaire » associée à q.

II.F.1) Montrer que f est une fonction polynomiale dont on précisera le degré et les racines.

II.F.2) Exprimer $g(\lambda)$ en fonction de $q(M)$, $\varphi(M, I)$ et λ. Quelles sont les racines de l'équation $g(\lambda) = 0$? En déduire que $q(M) = \det(M)$.

II.G - Soit

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

une matrice quelconque de M_2.

II.G.1) Donner un exemple de matrice M pour laquelle on ne peut pas appliquer la méthode de la question II.F.

II.G.2) Calculer $q(M)$ en fonction de a, b, c, d lorsque $a \neq 0$. On pourra utiliser la méthode du pivot de Gauss et son interprétation en terme de produits matriciels pour trigonaliser M.

II.G.3) On suppose $a = 0$ et $c \neq 0$. Calculer le produit

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} M \text{ et en déduire } q(M).$$

II.G.4) En déduire une formule de $q(M)$ en fonction de a, b, c, d valable pour toute matrice M.

Partie III - Étude d'une surface de $\mathbb{R}^3$

Dans ce qui suit, S_2 est rapporté au repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (0, E_1, E_2, E_3)$ les matrices E_1, E_2, E_3 ayant été définies à la partie I. Les matrices sont donc ici considérées comme des point de l'espace affine euclidien S_2. Pour tout réel k, on note Γ_k l'ensemble des matrices $M = xE_1 + yE_2 + zE_3$ de S_2 dont le déterminant est égal à k.

$$\Gamma_k = \{M \in S_2 | \det(M) = k\}$$

III.A - Montrer que Γ_k est une quadrique et préciser son équation cartésienne dans $\mathcal{R}$.

III.B - Dans cette question, $k = 0$.

III.B.1) Montrer que par tout point M de Γ_0, $M \neq 0$, passe une droite Δ_M contenue dans Γ_0.

III.B.2) Soit $M_0(x_0, y_0 z_0) \in \Gamma_0$, $M_0 \neq 0$. Déterminer l'équation cartésienne du plan tangent à Γ_0 en M_0, et vérifier qu'il contient Δ_{M_0}.

III.C - Dans cette question $k = -1$.

III.C.1) Déterminer et tracer la projection orthogonale de Γ_{-1} sur le plan xOy.

III.C.2) Déterminer et tracer la projection orthogonale de Γ_{-1} sur le plan xOz.

III.C.3) Montrer que Γ_{-1} contient au moins deux droites strictement parallèles (on pourra exploiter III.C.2).

III.D - Équation réduite de Γ_k

III.D.1) Déterminer une équation réduite de Γ_k sous la forme

$$\alpha X^2 + \beta Y^2 + \gamma Z^2 = k, \alpha > 0 \text{ dans un repère orthonormé } \mathcal{R}^1(0, U, V, E_3).$$

On précisera U et V à l'aide de E_1, E_2 et on notera X, Y, Z Les coordonnées de M dans ce nouveau repère.

III.D.2) Reconnaître la surface Γ_k selon les valeurs de k.

Partie IV -

On s'intéresse dans cette partie aux applications Φ de M_2 dans M_2 qui vérifient le groupe des propriétés suivantes, appelé P :

$$\mathrm{P}\begin{cases}\Phi \text{ est linéaire et bijective}\\ \forall(M, M')\in M_2\times M_2,\ \ \Phi(MM') = \Phi(M)\Phi(M')\\ \forall M\in M_2,\quad \Phi({}^tM) = {}^t\Phi(M)\end{cases}$$

IV.A - *Dans cette question, on s'intéresse au cas général, et Φ est une application vérifiant la propriété P.*

IV.A.1) Montrer que :

a) $\Phi(I) = I$;

b) $\Phi(S_2) = S_2$;

c) $\Phi(E_4) = \pm E_4$.

IV.A.2) Montrer que pour toute matrice $M \in M_2, \Phi(M)$ est inversible si et seulement si M est inversible. En déduire $\Phi(\Gamma_0)$.

IV.B - *Dans cette question, on étudie un exemple d'application Φ. Soit A une matrice de S_2 (c'est-à-dire telle que $A = {}^tA$) s'écrivant :* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$.

On définit l'application Φ_A de M_2 dans M_2 par : $\Phi_A(M) = AMA$.

IV.B.1) Montrer que Φ_A vérifie la propriété P si et seulement si $A^2 = I$.

On suppose dans les questions IV.B.2 à IV.B.5 que Φ_A vérifie la propriété P et que A est distinct de I et de $-I$.

IV.B.2) Montrer que A est une matrice orthogonale symétrique et en déduire qu'il est possible d'exprimer les valeurs de a, b, c en fonction d'un seul paramètre $\theta \in [0, 2\pi[$. En déduire $\Phi_A(E_4)$.

IV.B.3) Montrer que A décrit un cercle de S_2 dont on précisera le plan à l'aide de deux vecteurs directeurs, ainsi que le centre et le rayon.

IV.B.4) Soit $M \in M_2$. Calculer la norme euclidienne de $\Phi_A(M)$ en fonction de la norme de M (norme associée au produit scalaire défini à la partie I). En déduire que Φ_A est une symétrie orthogonale.

IV.B.5) Étude de la restriction de Φ_A à S_2 (que l'on notera encore Φ_A).

a) Montrer que Φ_A est la réflexion par rapport à un plan que l'on précisera en fonction de I et de A.

b) Déterminer la matrice de la restriction de Φ_A à S_2 dans la base orthonormée (U, V, E_3) de S_2, avec $U = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_1 + E_2)$ et $V = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_1 - E_2)$.

IV.C - *On revient à nouveau au cas général étudié au IV.A. L'application Φ vérifie donc la propriété* $\mathcal{P}$.

IV.C.1) Montrer que l'application $M \mapsto \det(\Phi(M))$ de M_2 dans $\mathbb{R}$, est une « forme quadratique » non nulle sur M_2 c'est-à-dire que $\det \circ \Phi \circ \Psi$ est une forme quadratique non nulle sur $\mathbb{R}^4$.

IV.C.2) En déduire que $\forall M \in M_2, \det(\Phi(M)) = \det(M)$, puis que l'application Φ laisse globalement invariantes toutes les surfaces Γ_k pour $k \in \mathbb{R}$.

IV.C.3) En écrivant la matrice la plus générale de Φ dans la base orthonormée $\mathcal{B} = (U, V, E_3, E_4)$ où U et V ont été définis à la question IV.B.5.b), on remarquera que $\Phi(U) = U$, $\Phi(S_2) = S_2$, $\Phi(E_4) = \varepsilon E_4$ avec $\varepsilon = \pm 1$, et en écrivant que pour tout M de M_2,

$\det(\Phi(M)) = \det(M)$, démontrer qu'il existe $(\varepsilon, \varepsilon') \in \{-1, 1\}^2$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ tels que la matrice de Φ dans $\mathcal{B}$ soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \varepsilon'\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & -\varepsilon'\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

IV.C.4) On suppose $\varepsilon' = 1$. On considère l'application Φ_A avec

$$A = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)V + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)E_3\right).$$

a) Montrer que l'application $\Phi \circ \Phi_A$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$ et déterminer sa matrice dans $\mathcal{B}$.

b) Quelle est la matrice dans $\mathcal{B}$ de l'application qui à M associe ${}^tM$? En déduire la valeur de ε et montrer que $\Phi = \Phi_A$.

IV.C.5) On suppose $\varepsilon' = -1$ et on considère toujours la matrice

$$A = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)V + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)E_3\right).$$

En considérant l'application $\Phi \circ \Phi_A$, montrer qu'il existe une matrice B, que l'on déterminera, telle que $\Phi = \Phi_B \circ \Phi_A$.

••• FIN •••
