MATHÉMATIQUES I

L'épreuve est constituée par deux problèmes indépendants.

Partie I -

α étant un réel donné, on désigne par f_α la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par :

$$f_\alpha(x) = \frac{x}{1 + x^\alpha \sin^2 x},$$

et, dans le cas où l'intégrale est convergente, on pose :

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} f_\alpha(x)dx.$$

I.A -

I.A.1) On suppose $\alpha < 0$.

Déterminer la limite de la fonction f_α quand x tend vers $+\infty$.

L'intégrale de la fonction f_α est-elle convergente sur $\mathbb{R}^+$?

I.A.2) Reprendre la question précédente dans le cas où $\alpha = 0$.

I.A.3) Montrer que :

$$f_\alpha(x) \geq \frac{x}{1 + x^\alpha}.$$

L'intégrale de la fonction f_α est-elle convergente sur $\mathbb{R}^+$ quand α vérifie $0 < \alpha \leq 2$?

Filière TSI

I.B - On suppose $\alpha > 0$. On pose :

$$v_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi \int_{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{dx}{1 + \left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^{\alpha} \sin^2 x},$$

$$u_n = \int_{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} f_{\alpha}(x)dx,$$

et $$w_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \int_{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} \frac{dx}{1 + \left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\right)^{\alpha} \sin^2 x}.$$

I.B.1) Montrer que l'intégrale de la fonction f_{α} est convergente sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n \text{ est convergente.}$$

I.B.2) Montrer que :

$$\forall n \in N^*,\ v_n \le u_n \le w_n .$$

I.B.3) Montrer que

$$w_n = (2n+1)\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1 + \left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\right)^{\alpha} \sin^2 u} \quad \text{et} \quad v_n = (2n-1)\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{du}{1 + \left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right)^{\alpha} \sin^2 u}.$$

I.B.4) h étant un réel strictement positif, calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + h^2 \sin^2 x} dx$$

et en déduire v_n et w_n.

I.B.5) Montrer qu'il existe une constante K strictement positive telle que

$$v_n \geq \frac{K\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{(n+1)^{\frac{\alpha}{2}-1}}$$

pour tout entier naturel n non nul et une constante K' strictement positive telle que

$$w_n \leq \frac{K'\pi^{2-\frac{\alpha}{2}}}{(n-1)^{\frac{\alpha}{2}-1}}$$

pour tout entier naturel n strictement supérieur à 1.

I.B.6) En déduire que l'intégrale de la fonction f_α est convergente sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $\alpha > 4$.

I.C - On pose

$$\phi(\alpha) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} f_\alpha(x)\ \mathrm{dx}$$

pour tout α réel strictement supérieur à 4.

I.C.1) Montrer que ϕ est décroissante sur $]4, +\infty[$.

I.C.2) En utilisant la minoration de v_n établie à la question I.B.5, montrer que $\phi(\alpha)$ tend vers l'infini quand α tend vers 4.

I.C.3) En utilisant la majoration de w_n établie à la question I.B.5, montrer que $\phi(\alpha)$ tend vers 0 quand α tend vers $+\infty$.

Partie II -

On considère la série de fonctions

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \text{ avec } u_n(x) = \frac{n^x}{n!}.$$

On pose

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x).$$

II.A - Pour quelles valeurs de x la série est-elle convergente ?

On pose alors

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$$

II.B - Montrer que S est à valeurs strictement positives et que la fonction S est strictement croissante.

II.C - Calculer $S(0), S(1), S(2), S(3)$.

II.D - Montrer que, pour tout réel x strictement négatif et tout entier naturel n strictement supérieur à 1 :

$$0 < S(x) \leq S_{n-1}(x) + \frac{n^x}{n!}\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

On remarquera que, lorsque k est strictement supérieur à n, on a :

$$\left(\frac{k}{n}\right)^x < 1 \quad \text{et} \quad \frac{n!}{k!} \leq \left(\frac{1}{n+1}\right)^{k-n}.$$

II.E - En déduire une valeur approchée de $S(-1)$ à 10^{-2} près.

II.F - Étudier les limites de S quand x tend vers $+\infty$, quand x tend vers $-\infty$.

II.G - Donner l'allure de la représentation graphique de S, en précisant la nature des branches infinies.

II.H - Démontrer que :

$$\forall x \in [0, 1], \forall p \in N^*, \sum_{k=0}^{p} \frac{x^k}{k!} \leq e^x \leq \sum_{k=0}^{p-1} \frac{x^k}{k!} + e\frac{x^p}{p!}.$$

II.I - Démontrer que l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} \mathrm{d}t$$

est convergente.

II.J - Démontrer que

$$\int_0^1 \frac{e^t - 1}{t} dt = S(-1).$$

••• FIN •••
