

---

# MATHÉMATIQUES II

---

**Notations.** Dans tout le problème, on ne considère que des matrices carrées réelles. On désigne par  $\mathbf{E}$  l'espace vectoriel réel des matrices carrées (réelles) d'ordre 2, c'est-à-dire à 2 lignes et 2 colonnes. Si  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{E}$ , on rappelle la définition de sa trace  $\text{Tr}(M) = a + d$  et de son *polynôme caractéristique*

$$\chi_M : x \in \mathbb{R} \mapsto \det(x\mathbb{I}_2 - M),$$

où  $\mathbb{I}_2$  désigne la matrice identité et  $\det$  le déterminant d'ordre 2.

En outre, on identifie les espaces vectoriels réels  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$  et on munit  $\mathbb{R}^2$  de son produit scalaire canonique et de la norme euclidienne associée.

On pose donc, pour  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ,  $\|X\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ .

On rappelle enfin qu'une matrice carrée réelle  $A$  d'ordre 2 est *orthogonale* si, et seulement si,  ${}^tAA = \mathbb{I}_2$ . L'ensemble des matrices orthogonales réelles d'ordre 2 est noté  $O_2$ .

On désigne par  $S_2$  l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles d'ordre 2.

## Partie I - Généralités

### I.A -

I.A.1) Démontrer que si deux matrices de  $\mathbf{E}$  sont semblables, elles ont même trace et même polynôme caractéristique. La réciproque est-elle vraie? Justifier la réponse.

I.A.2) Démontrer que  $\Phi : (M_1, M_2) \mapsto \text{Tr}({}^tM_1 M_2)$  définit un produit scalaire sur  $\mathbf{E}$ . Pour la suite du problème,  $\mathbf{E}$  pourra être muni de la norme associée à ce produit scalaire.

I.A.3) Démontrer que, pour toute matrice  $M \in \mathbf{E}$ , on a  $|\det(M)| \leq \frac{1}{2} \text{Tr}({}^tMM)$ . Quand y a-t-il égalité?

---

# Filière PSI

---

I.A.4) Pour  $M \in \mathbf{E}$  et  $x \in \mathbb{R}$ , exprimer  $\chi_M(x)$  en fonction de  $x$ ,  $\text{Tr}(M)$  et  $\det(M)$ . En conclure que 1 est une valeur propre de  $M$  si, et seulement si,  $\text{Tr}(M) = 1 + \det(M)$ .

## I.B - La décomposition $UDV$

On donne dans cette question  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  élément de  $\mathbf{E}$ , avec  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ .

I.B.1) Si  $\theta \in \mathbb{R}$ , on pose  $P(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$  et  $\varphi(\theta) = \text{Tr}(MP(\theta))$ .

Démontrer que  $\varphi$  est une application bornée de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et qu'il existe  $\theta_1 \in \mathbb{R}$  en lequel  $\varphi$  atteint son maximum. En choisissant alors un tel  $\theta_1$  et en considérant  $\varphi'(\theta_1)$ , démontrer que  $MP(\theta_1)$  est une matrice symétrique.

I.B.2) En déduire que  $M \in \mathbf{E}$  peut se mettre sous la forme  $P(t_1)DP(t_2)$ , où  $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$  et où  $D$  est une matrice diagonale de  $\mathbf{E}$ .

Remarque : on a établi que toute matrice  $M \in \mathbf{E}$  peut se mettre sous la forme  $M = UDV$ , où  $D$  est diagonale et  $U, V$  orthogonales.

I.B.3) **Exemple** : décomposer la matrice  $M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  sous la forme  $P(t_1)DP(t_2)$ , où  $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ .

I.C - Soit  $A \in \mathbf{E}$ ,  $U$  et  $V$  des matrices orthogonales d'ordre 2 et  $B = UAV$ . Démontrer que  ${}^tA A$  et  ${}^tB B$  sont semblables.

On ne demande pas de démontrer le résultat suivant, qui est admis : toute matrice  $M \in \mathbf{E}$  peut se mettre sous la forme  $P(t_1)DP(t_2)$ , où  $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$  et où  $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \in \mathbf{E}$  vérifie en outre  $\alpha \leq \beta$  et  $\beta \geq 0$ .

## Partie II - Les ensembles $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$

On désigne par  $\mathcal{R}$  l'ensemble des matrices  $M \in \mathbf{E}$  telles que  $\|MX\| \leq \|X\|$  pour tout vecteur-colonne  $X \in \mathbb{R}^2$ .

**II.A** - Reformuler la définition de  $\mathcal{R}$  en utilisant la notion de *norme subordonnée*.

**II.B** -

II.B.1) Si  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{R}$ , démontrer que  $(a, b, c, d)$  appartient  $[-1, 1]^4$ .

Démontrer que  $\mathcal{R}$  est un compact de  $\mathbf{E}$ .

Si  $(M_1, M_2) \in \mathbf{E}^2$ , on définit le segment  $[M_1 M_2]$  comme l'ensemble des matrices de la forme  $(1-t)M_1 + tM_2$ , où  $t$  décrit  $[0, 1]$ .

II.B.2) Démontrer que  $\mathcal{R}$  est aussi un *convexe* de  $\mathbf{E}$ , c'est-à-dire que, si  $M_1$  et  $M_2$  sont deux matrices de  $\mathcal{R}$ , le segment  $[M_1 M_2]$  est inclus dans  $\mathcal{R}$ .

**II.C** -

II.C.1) Démontrer que  $M \in \mathcal{R} \iff \forall X \in \mathbb{R}^2, \quad {}^t X {}^t M M X \leq {}^t X X$ .

II.C.2)

a) Si  $M \in \mathbf{E}$ , justifier le fait que le polynôme caractéristique de  ${}^t M M$  est de la forme  $(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$ , avec  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  réels.

Démontrer ensuite que ces réels sont positifs ou nuls.

On pourra considérer des expressions de la forme  ${}^t X {}^t M M X$ .

b) Démontrer que  $M \in \mathcal{R}$  si, et seulement si, les valeurs propres de  ${}^t M M$  appartiennent à  $[0, 1]$ .

**II.D** - Déduire en particulier de **II.C.2.a** que

$$M \in \mathcal{R} \iff \begin{cases} \text{Tr}({}^t M M) & \leq 1 + (\det(M))^2 \\ \text{Tr}({}^t M M) & \leq 2 \end{cases}$$

**II.E** - On définit  $\mathcal{S}$  comme :

$$\mathcal{S} = \{M \in \mathcal{R} \mid \exists X_0 \in \mathbb{R}^2, X_0 \neq 0, \|MX_0\| = \|X_0\|\}.$$

II.E.1) En reprenant les calculs de **II.C.2.a**, démontrer que  $M$  appartient à  $\mathcal{S}$  si, et seulement si, le polynôme caractéristique de  ${}^tMM$  est de la forme  $(x - \lambda)(x - 1)$ , où  $\lambda \in [0, 1]$ .

II.E.2) Si  $M \in \mathbf{E}$ , on l'écrit sous la forme  $M = P(t_1)DP(t_2)$ , où  $(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$  et où  $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$  avec  $\alpha \leq \beta$  et  $\beta \geq 0$ .

a) Déterminer les valeurs propres de  ${}^tMM$  en fonction de  $\alpha$  et  $\beta$ .

b) Démontrer que  $M \in \mathcal{S}$  si, et seulement si, il existe  $U$  et  $V$ , matrices orthogonales d'ordre 2 et  $\gamma \in [-1, 1]$  tels que  $M = U \begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} V$ .

II.E.3) En déduire que, si  $M$  est une matrice *non orthogonale* de  $\mathcal{S}$ , il existe des matrices orthogonales  $W$  et  $W'$  d'ordre 2 telles que  $M$  appartienne au segment  $[WW']$ .

*On pourra montrer d'abord que si  $M$  est de la forme  $\begin{pmatrix} \gamma & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , avec  $\gamma \in ]-1, 1[$ , on peut choisir  $W$  et  $W'$  orthogonales et diagonales telles que  $M$  appartienne au segment  $[WW']$ .*

**II.F** - On désigne par  $\mathbf{E}_1$  l'ensemble des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ , avec  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et par  $\mathbf{E}_2$  l'ensemble des matrices de la forme  $\begin{pmatrix} c & d \\ d & -c \end{pmatrix}$ , avec  $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ .

II.F.1) Démontrer que  $\mathbf{E}_1$  et  $\mathbf{E}_2$  sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $\mathbf{E}$  orthogonaux au sens du produit scalaire  $\Phi$  défini en **I.A.2**.

II.F.2) Démontrer que  $\mathbf{E}_1$  contient toutes les matrices orthogonales d'ordre 2 et de déterminant +1 et que  $\mathbf{E}_2$  contient toutes les matrices orthogonales d'ordre 2 et de déterminant -1.

II.F.3) Lorsque  $M$  est une matrice *non orthogonale* de  $\mathcal{S}$ , déduire de ce qui précède le nombre de segments  $[WW']$  - où  $W$  et  $W'$  sont orthogonales - contenant  $M$ .

### *Partie III - Définition de l'ensemble $\mathcal{H}$*

#### III.A -

III.A.1) Si  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , démontrer que que  $M \in \mathcal{S}$  implique

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1 + (ad - bc)^2$$

On désigne par  $\mathcal{H}$  l'ensemble des matrices  $M \in \mathbf{E}$  vérifiant cette dernière relation.

III.A.2)

a) Réciproquement, à quelle condition, vérifiée par son déterminant, une matrice  $M \in \mathcal{H}$  appartient-elle à  $\mathcal{S}$  ?

b) Démontrer qu'une matrice  $M \in \mathcal{H}$  appartient à  $\mathcal{S}$  si et seulement si  $\text{Tr}({}^t M M) \leq 2$ .

#### III.B -

III.B.1) Si  $(A, B) \in \mathbf{E}_1 \times \mathbf{E}_2$ , calculer  $\det(A + B)$  en fonction de  $\det(A)$  et de  $\det(B)$ .

**Si  $(M_1, M_2) \in \mathbf{E}^2$ , avec  $M_1 \neq M_2$  on définit la *droite affine*  $(M_1 M_2)$  comme l'ensemble des matrices de la forme  $(1 - t)M_1 + tM_2$ , où  $t$  décrit  $\mathbb{R}$ . Dans la suite, on l'appellera *droite*  $(M_1 M_2)$ .**

III.B.2) Démontrer que, si  $W$  et  $W'$  sont des matrices orthogonales éléments de  $\mathbf{E}$ , telles que  $\det(W) = +1$  et  $\det(W') = -1$ , la droite  $(WW')$  est incluse dans  $\mathcal{H}$ . Réciproquement,  $\mathcal{H}$  est-elle réunion de droites de cette forme ?

## *Partie IV - Représentation graphique de $\mathcal{H}$*

**IV.A** - Si  $M \in \mathbf{E}$ , on rappelle que le polynôme caractéristique de  ${}^t M M$  est de la forme  $(x - \lambda_1)(x - \lambda_2)$ , avec  $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $\lambda_1 \geq 0$  et  $\lambda_2 \geq 0$ . Pour fixer les idées, on suppose  $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2$ .

On suppose  $M \neq 0$ . Déterminer en fonction de  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  le nombre de réels  $t$  **positifs** tels que  $tM \in \mathcal{H}$ . **On en trouvera « en général » deux, et on interprétera les cas particuliers.**

**On étudie à partir de cette question l'intersection de  $\mathcal{H}$  avec certains sous-espaces vectoriels de  $\mathbf{E}$ . On commence par des exemples de plans vectoriels.**

**IV.B** - Soit  $\mathbf{P}_1$  l'ensemble des matrices de la forme  $\mathcal{M}_1(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \\ \sqrt{2} & x \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ .

IV.B.1) Déterminer les matrices orthogonales qui sont dans  $\mathbf{P}_1$ .

IV.B.2) **Dans cette question, on identifie  $\mathcal{M}_1(x, y)$  avec le point  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  muni de son produit scalaire canonique et de son repère orthonormal canonique. On procédera à des identifications analogues dans les questions suivantes.**

a) Démontrer que  $\mathcal{H} \cap \mathbf{P}_1$  est la réunion de deux coniques  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$ . Déterminer  $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ .

b) Représenter par un dessin  $\mathcal{H} \cap \mathbf{P}_1$  et  $\mathcal{S} \cap \mathbf{P}_1$  dans le plan  $\mathbf{P}_1$ .

**IV.C** - Soit  $\mathbf{P}_2$  l'ensemble des matrices de la forme  $\mathcal{M}_2(x, y) = \begin{pmatrix} x & x \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & y \end{pmatrix}$ . Soit  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ ; on ne demande pas de vérifier que la relation du **III.A.1** implique

$$\mathcal{M}_2(x, y) \in \mathcal{H} \cap \mathbf{P}_2 \iff x^2 y^2 - 2(x^2 + y^2 - 1) = 0$$

Étudier et représenter par un dessin  $\mathcal{H} \cap \mathbf{P}_2$  et  $\mathcal{S} \cap \mathbf{P}_2$  dans le plan  $\mathbf{P}_2$  (on pourra discuter et résoudre l'équation par rapport à la variable  $y$ ).

**IV.D - Exemple d'intersection de  $\mathcal{H}$  avec un sous-espace de dimension 3**

On désigne par  $\mathbf{S}_2$  l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles d'ordre 2.

IV.D.1) Démontrer qu'une matrice  $M \in \mathbf{S}_2$  appartient à  $\mathcal{H}$  si, et seulement si, elle admet une valeur propre égale à  $+1$  ou à  $-1$ .

On admet qu'une base orthonormale de  $\mathbf{S}_2$  est  $\mathcal{B} = (M_1, M_2, M_3)$ , avec

$$M_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

IV.D.2) En écrivant une matrice de  $\mathbf{S}_2$  sous la forme  $xM_1 + yM_2 + zM_3$ , décrire l'ensemble  $C_a$  des matrices de  $\mathbf{S}_2$  admettant le réel donné  $a$  comme valeur propre. En déduire une description de  $\mathcal{H} \cap \mathbf{S}_2$ .

IV.D.3) Soit  $\theta \in \mathbb{R}$  et  $N = P(\theta)M(x, y, z)P(\theta)^{-1}$ ; démontrer que c'est une matrice de la forme  $M(u, v, w)$  et exprimer  $(u, v, w)$  en fonction de  $(x, y, z)$ . Interpréter certains des résultats de la question **IV.D.2**.

IV.D.4) Représenter par un dessin  $\mathcal{H} \cap \mathbf{S}_2$  et  $\mathcal{S} \cap \mathbf{S}_2$ .

---

••• FIN •••

---