Épreuve : MATHÉMATIQUES I — Filière PC

Dans tout le problème, on notera f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2}}.$$

Partie I -

I.A -

I.A.1) Montrer que pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. On note $m_n(f) = \int_{\mathbb{R}} x^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

On admettra dans toute la suite de ce problème que $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

I.A.2) Déterminer m_1.

I.A.3) Lorsque $n \geqslant 2$, donner une relation de récurrence liant m_n et m_{n-2}. En déduire une expression de m_n en fonction de n.

I.B - Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-tx} f(x)\,\mathrm{d}x$ est convergente et déterminer sa valeur en fonction de t.

On pourra considérer la forme canonique du trinôme $x \mapsto -\dfrac{x^2}{2} - tx$.

I.C -

I.C.1) Le réel t étant fixé, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k t^k x^k}{k!} f(x)$.

Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$

I.C.2) Montrer à l'aide du théorème de convergence dominée que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-tx} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k m_k \frac{t^k}{k!}.$$

I.C.3) Retrouver la valeur de $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-tx} f(x)\,\mathrm{d}x$ obtenue précédemment.

Partie II -

Dans toute la suite du problème, on note E l'ensemble des fonctions g continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles, telles qu'il existe un réel positif $M(g)$ et un réel strictement positif λ vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $|g(x)| \leqslant M(g) f(\lambda x)$.

II.A - Démontrer que E muni des lois $+$ et $\cdot$ usuelles est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, qui contient f.

II.B - Soient u et v deux éléments de E. On note $u * v$ l'application définie, pour tout réel x pour lequel la formule a un sens, par

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}} u(t) v(x-t)\,\mathrm{d}t.$$

II.B.1) Démontrer que $u * v$ est définie sur $\mathbb{R}$.

II.B.2) Démontrer que $u * v = v * u$.

II.B.3) Déterminer $(f * f)(x)$.

II.B.4) Démontrer que $u * v$ appartient à E (on utilisera le résultat de la question précédente).

II.C - Soit $u \in E$. On définit l'application $\widehat{u}$ par : $\widehat{u}(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-tx} u(x)\,\mathrm{d}x$.

II.C.1) Montrer que $\widehat{u}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

II.C.2) Montrer que $\widehat{u}$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et déterminer une expression de $\widehat{u}'(t)$ et $\widehat{u}''(t)$ à l'aide d'intégrales.

II.D - *Dans cette section D seulement, on admet le résultat suivant :*

Soit $f : (x,y) \mapsto f(x,y)$ une application continue de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle qu'il existe deux applications h_1 et h_2 continues sur $\mathbb{R}$ et intégrables sur $\mathbb{R}$ avec :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ |f(x,y)| \leqslant h_1(x) h_2(y)$$

alors $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y$ *et* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$ *sont convergentes et ces deux intégrales doubles sont égales.*

Soient u et v deux éléments de E.

- version du 19 mars 2007 12h21

II.D.1) Démontrer qu'il existe une constante $a > 0$ telle que pour tout couple $(x,t) \in \mathbb{R}^2$:
$$-t^2 - (x-t)^2 \leqslant -a(t^2 + x^2).$$

II.D.2) Démontrer la formule :
$$\int_{\mathbb{R}} u * v(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} u(x)\,\mathrm{d}x. \int_{\mathbb{R}} v(x)\,\mathrm{d}x.$$

II.D.3) Démontrer la relation, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:
$$\widehat{u*v}(\theta) = \int_{x\in\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x\theta} \cdot (u*v)(x)\,\mathrm{d}x = \widehat{u}(\theta).\widehat{v}(\theta).$$

on pourra utiliser l'égalité
$$(t + \frac{\theta}{2\gamma})^2 + ((x + \frac{\theta}{\gamma}) - (t + \frac{\theta}{2\gamma}))^2 = t^2 + (x-t)^2 + \frac{\theta x}{\gamma} + \frac{\theta^2}{2\gamma^2}.$$

Dans la suite de ce problème, on considère le sous ensemble E_1 de E dont les éléments sont les fonctions $h \in E$ telles que $\int_{\mathbb{R}} h(x)\,\mathrm{d}x = 1$. On notera que la fonction f de la partie I est un élément de E_1. À toute fonction $h \in E_1$, on associe la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la récurrence suivante :
$$h_1 = h \text{ et pour tout } n \geqslant 2,\ h_n = h_{n-1} * h_1.$$

On remarquera que la fonction h_n est alors élément de E d'après II B 4.

L'objectif est d'étudier certaines propriétés de cette suite de fonctions, dans un premier temps sur des exemples puis dans le cas général.

Partie III -

III.A - Soit h un élément de E_1.

III.A.1) Démontrer que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite d'éléments de E_1.

III.A.2) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\widehat{h_n}(x)$ en fonction de $\widehat{h}(x)$ et de n.

III.B - Dans cette question on étudie la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ associée à la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{-t^2}{2}}$ étudiée dans la partie I (on a donc posé $h = f$).

III.B.1) Déterminer une constante K_2 telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_2(x) = K_2 \mathrm{e}^{-\dfrac{x^2}{4}}$.

III.B.2) Déterminer une constante K_n telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = K_n \mathrm{e}^{-\dfrac{x^2}{2n}}$.

III.B.3) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \widehat{f_n}(\dfrac{t}{\sqrt{n}})$ en fonction de $t \in \mathbb{R}$.

III.C - Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} g(x) = \dfrac{1}{2}\cos(x) & \text{si } x \in [-\pi/2, \pi/2] \\ g(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$

III.C.1) Démontrer que $g \in E_1$.

III.C.2) Montrer que la fonction $g * g$ est paire. Donner pour $x \geqslant 0$ l'expression de $(g*g)(x)$ en fonction des valeurs de x : on distinguera deux intervalles pour x.

III.C.3) Démontrer que g_n est nulle en dehors d'un intervalle $[-a_n, a_n]$ que l'on précisera.

III.C.4) Déterminer l'expression de $\widehat{g}(t)$ en fonction de t.

III.C.5) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \widehat{g_n}(\dfrac{t}{\sqrt{n}})$ en fonction de t.

Partie IV -

Soit h un élément de E_1. On note pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$M_{1,n} = \int_{\mathbb{R}} x h_n(x) dx\ , M_{2,n} = \int_{\mathbb{R}} x^2 h_n(x) dx \text{ et } V_n = M_{2,n} - M_{1,n}^2$$

IV.A -

IV.A.1) Montrer que la fonction $\widehat{h_n}$ possède un développement limité à l'ordre 2 dont on précisera les coefficients à l'aide de $M_{1,n}$ et $M_{2,n}$.

IV.A.2) En déduire que $M_{1,n} = nM_{1,1}$ et $V_n = nV_1$.

IV.B - On suppose dans cette question que la fonction h est telle que $M_{1,1} = 0$.

Déterminer la limite de la suite $\left(\widehat{h_n}\left(\dfrac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

• • • FIN • • •