Concours Centrale - Supélec 2007

Épreuve : MATHÉMATIQUES I — Filière PSI

On étudie qualitativement l'évolution d'un système régi par l'équation différentielle du second ordre autonome $x'' = -f'(x)$ où la fonction f est *paire* et de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, x est l'état du système, fonction du temps t.

En introduisant la fonction auxiliaire $y = x'$ et l'état vectoriel $X = (x, y)$, on se ramène à l'étude d'un système différentiel autonome du premier ordre de dimension deux, avec condition initiale :

$$(S) \qquad \begin{cases} X' = \Phi(X) = \begin{pmatrix} y \\ -f'(x) \end{pmatrix} \\ X(t_0) = (x_0, y_0) \end{cases}$$

Rappels et définitions

Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et φ une fonction de classe C^1 définie sur I, on dira que φ est un C^1-difféomorphisme de I sur son image si φ est une bijection de I sur $\varphi(I)$ dont la fonction réciproque φ^{-1} est aussi de classe C^1. Cela équivaut à ce que φ' ne s'annule pas sur l'intérieur de I. Lorsque $I =]a, b[$, alors φ est un C^1-difféomorphisme de $]a, b[$ sur $]\alpha, \beta[$ ou $]\beta, \alpha[$ avec $\alpha = \lim\limits_{t \to a+} \varphi(t)$ et $\beta = \lim\limits_{t \to b-} \varphi(t)$. Ces limites existent dans $\overline{\mathbb{R}}$ en raison de la monotonie de φ.

Théorème de Cauchy-Lipschitz : soit g une fonction C^1 sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}$; pour toute condition initiale $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times U$ le problème de Cauchy est de résoudre

$$(E) \qquad x' = g(x) \text{ avec la condition initiale } x(t_0) = x_0.$$

Alors il existe un réel $\eta > 0$ tel que (E) admet une unique solution définie sur $]t_0 - \eta, t_0 + \eta[$.

Si x_1, x_2 sont deux solutions de (E) définies sur le même intervalle I, elles sont égales sur I.

Plan de phase et trajectoire du système : on appelle plan de phase du système l'espace $P = \mathbb{R}^2$ dans lequel on représentera l'état $X = (x, y) = (x, x')$. Le système différentiel (S) est alors associé au *champ de vecteurs* $\Phi(X)$.

Une *trajectoire* du système partant du point $X_0 = (x_0, y_0)$ est une courbe paramétrée définie par $X(t) = (x(t), y(t))$ $t \in I$, vérifiant le système (S) avec la condition initiale $X(t_0) = X_0$.

On notera que le choix de t_0 est arbitraire et ne modifie pas la trajectoire.

Questions préliminaires

1. Quel lien y a-t-il entre une trajectoire $\gamma(t)$ du système et le champ $\Phi(X)$?
2. Démontrer que si $(X(t), t \in I)$ est une solution de (S), la fonction d'énergie $F(X) = \dfrac{y^2}{2} + f(x)$ est constante sur I. Pour toute trajectoire issue de X_0, on notera $h = F(X_0)$ cette valeur constante, ou énergie de la trajectoire. Il en résulte que si $X = (x, y)$, la conservation de l'énergie

$$(H) \qquad F(X) = h$$

donne une équation implicite des trajectoires dans le plan de phase P.

Partie I - Premiers exemples

On prend ici $f(x) = \dfrac{k}{2}x^2$ avec $k \in \mathbb{R}$.

I.A - On suppose : $k = \omega^2 > 0$.

I.A.1) Déterminer la solution $t \mapsto x(t)$ d'énergie $h > 0$. Quelle est la période T de cette solution ?

I.A.2) Démontrer que la trajectoire associée dans l'espace des phases est une courbe fermée Γ_h dont on précisera la nature et tracera le graphe

a) Donner son équation et ses points caractéristiques en fonction de ω et $h = F(X_0)$.

b) Indiquer sur le graphe le sens de parcours de cette trajectoire.

I.A.3) Que vaut la solution $t \mapsto X(t)$ si $X_0 = (0, 0)$?

Quelles sont toutes les trajectoires d'énergie 0 ?

I.B - On suppose : $k = -\omega^2 < 0$.

I.B.1) Calculer la solution générale $t \mapsto x(t)$.

I.B.2) Donner l'équation des trajectoires γ_h et les représenter graphiquement selon que $h > 0$, $h < 0$ ou $h = 0$ (on indiquera le sens de parcours de ces trajectoires). Quelle est la nature de ces courbes, sont-elles fermées ?

I.B.3) Que se passe-t-il si $X_0 = (0, 0)$?

Quelles sont toutes les trajectoires d'énergie nulle ?

Partie II - Propriétés générales des trajectoires

On s'intéresse ici aux solutions de (S) partant à l'instant $t_0 = 0$ d'un point $X_0 = (x_0, y_0)$ du demi-plan supérieur $P^+ = \{(x,y) \mid y > 0\}$. On pose, comme convenu, $h = F(X_0)$.

II.A -

II.A.1) Soit $U = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) < h\}$. Démontrer qu'il existe un unique intervalle ouvert non vide *maximal* $I(x_0) =]a, b[$ (avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$) tel que $x_0 \in I(x_0) \subset U$.

II.A.2) En résolvant l'équation (H) par rapport à y, obtenir une équation différentielle du premier ordre en x.

II.A.3) Montrer que la fonction τ, définie par
$$\tau(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2(h - f(u))}}$$
est un C^1-difféomorphisme de $I(x_0) =]a, b[$ sur $J(x_0) =]\alpha, \beta[$.

Résoudre sur l'intervalle $J(x_0)$ l'équation obtenue à la question précédente.

II.B - Démontrer que la fonction $\Psi : t \mapsto (\psi(t), \psi'(t))$ avec $\psi(t) = \tau^{-1}(t)$ est solution de (S) définie sur l'intervalle $J(x_0) =]\alpha, \beta[$.

II.C - On considère une autre solution de (S), notée $X_1 : t \mapsto (x_1(t), x_1'(t))$ qui est définie sur le même intervalle $J(x_0)$ telle que $X_1(0) = (x_0, y_0)$.

Soit $J_1 =]u, v[\subset J(x_0)$ l'intervalle maximal (contenant 0) sur lequel $x_1'(t) > 0$.

II.C.1) On suppose $\alpha < u$ (resp. $v < \beta$). Appliquer le théorème de Cauchy-Lipschitz et en déduire une contradiction (examiner les signes de $\psi'(u), x_1'(u)$).

II.C.2) En déduire que Ψ est l'unique solution de (S) définie sur $J(x_0)$ satisfaisant à la condition initiale $\Psi(0) = (x_0, y_0)$.

II.D - Démontrer que $Z : t \mapsto (\psi(-t), -\psi'(-t))$ est l'unique solution de (S) sur $]-\beta, -\alpha[$ partant à l'instant $t = 0$ du point $Z_0 = (x_0, -y_0)$.

II.E - On veut ici caractériser les différents types de trajectoires possibles.

II.E.1) On suppose ici que $-\infty < a,\ f'(a) \neq 0$ et $b < +\infty,\ f'(b) \neq 0$.

Démontrer les propriétés suivantes :

a) $f(a) = f(b) = h,\ f'(a) < 0,\ f'(b) > 0$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) Déterminer $\lim\limits_{t \to \alpha+} \Psi(t)$ et $\lim\limits_{t \to \beta-} \Psi(t)$, puis montrer que Ψ se prolonge sur $[\alpha, \beta]$.

c) Montrer que la trajectoire Ψ se prolonge par la fonction $t \mapsto Z(t - 2\beta)$ définie sur l'intervalle $]\beta, 2\beta - \alpha[$ en une solution $t \mapsto X(t)$ de $(\mathcal{S})$ définie sur $]\alpha, 2\beta - \alpha[$ dont les deux extrémités coïncident.

d) Montrer que $t \mapsto X(t)$ se prolonge en une solution périodique sur $\mathbb{R}$ en posant $X(\alpha) = (a, 0)$. Exprimer la période T sous forme intégrale, représenter le graphe de la trajectoire Γ dans P, en précisant les temps associés aux points $(a, 0), X_0, (b, 0), Z_0, (a, 0)$.

II.E.2) On suppose ici que $-\infty < a,\ f(a) = h$ et $f'(a) = 0,\ f''(a) \neq 0$.

Démontrer que $f''(a) < 0$ et $\alpha = -\infty$. Énoncer le résultat équivalent pour b.

II.E.3) On suppose ici que $a = -\infty$. Que peut-on dire de la trajectoire sur l'intervalle de temps $]\alpha, 0[$? Énoncer le résultat équivalent pour b.

II.E.4) Pour les trajectoires Γ_h ou γ_h étudiées en partie I, préciser les points a, b et leur nature (type II.E.1) ou II.E.2) ou II.E.3)).

Partie III - Linéarisation autour d'un équilibre

Soit $e \in \mathbb{R}$, on dit que $E = (e, 0)$ est un point d'équilibre du système (S) si
$$\Phi(E) = 0 \Leftrightarrow f'(e) = 0.$$

On associe alors à (S) le système linéarisé au voisinage de E :
$$(L) \qquad \begin{cases} u' = v \\ v' = -f''(e)u \end{cases}$$

Ses solutions donnent une première approximation de celles de (S) pour des conditions initiales proches de E.

III.A - Quelle est la solution de (S), définie sur $\mathbb{R}$, partant de $X_0 = E$?

III.B - Déterminer les solutions de (L) (on posera $f''(e) = \pm\gamma^2$ avec $\gamma \in \mathbb{R}^+$).

III.C - Le point d'équilibre $(e, 0)$ est dit *stable* si les solutions de (L) restent bornées lorsque $t \to \pm\infty$.

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(e, 0)$ soit un équilibre stable.

On se place dans cette hypothèse pour la suite de cette partie.

Dans toute la suite de cette partie on désigne par e un nombre réel pour lequel $(e, 0)$ est un point d'équilibre stable tel que $f(e) = 0$.

III.D -

III.D.1) Démontrer qu'il existe un intervalle $[c, d]$ contenant e tel que la restriction de f à $[c, e]$ (resp. $[e, d]$) soit un C^1-difféomorphisme sur son image $[0, f(c)]$ (resp.$[0, f(d)]$).

III.D.2) En déduire l'existence de $H > 0$ tel que, pour tout $h \in]0, H]$, l'équation $f(x) = h$ admet deux solutions $x^-(h),\ x^+(h)$ avec
$$x^-(h) < e < x^+(h) \quad \text{et} \quad \lim_{h \to 0} x^-(h) = \lim_{h \to 0} x^+(h) = 0.$$

III.D.3) Démontrer que $(e,0)$ est un minimum local strict de $F(X)$, en déduire qu'il existe $R>0$ tel que, pour toute condition initiale $X_0 \in B(E,R)$ (disque de centre E et de rayon R), la trajectoire associée est périodique. Déterminer la période $T(h)$ comme intégrale fonction de h.

III.E - Soit une suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positive avec $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0$.

On pose, pour simplifier, $x_n^+ = x^+(h_n),\ x_n^- = x^-(h_n),\ T_n = T(h_n)$.

III.E.1) Donner le développement limité à l'ordre 2 de $f(u)$ au voisinage de e.

En déduire une expression de h_n en fonction de x_n^+ et v.

III.E.2) En paramétrant le segment $[e, x_n^+]$ par $v \in [0,1]$, démontrer l'existence d'une suite de fonctions continues (ε_n^+) qui tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini, telle que

$$\int_e^{x_n^+} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2(h_n - f(u))}} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{(1-v^2)f''(e) + \varepsilon_n^+(v)}}$$

Énoncer le résultat analogue sur l'intervalle $[x_n^-, e]$.

III.E.3) En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} T_n$ puis $\lim\limits_{h\to 0} T(h)$ (énoncer précisément le théorème utilisé). Quelle période retrouve-t-on ?

Partie IV - Le pendule non linéaire

On prend ici $f(x) = -\cos(x)$. Le système (S) représente alors le mouvement d'un pendule non linéaire (grandes élongations). Le champ de vecteur $\Phi(X)$ est alors 2π-périodique en x.

IV.A - Déterminer tous les points d'équilibre. Lesquels sont stables ?

IV.B - Démontrer que toute trajectoire du système d'énergie $h \in]0,1[$ est périodique. Comment sont définis les points a, b ?

IV.C - Pour une condition initiale $X_0 \in P^+$ d'énergie $h>1$, préciser les points a, b et leur type (cf. II.E).

Démontrer qu'alors on a $\alpha = -\infty$, $\beta = +\infty$, tracer qualitativement la trajectoire en indiquant le sens du parcours.

IV.D - On prend ici une condition initiale $X_0 = (0, y_0)$ d'énergie $h = 1$.

Que vaut $y_0 > 0$?

IV.D.1) Préciser les points a, b et utiliser II.E. Quelle est le type des points a, b ? Que valent ici α, β ? Interpréter le résultat par rapport au pendule.

IV.D.2) Calculer explicitement la fonction $\tau(x)$, en déduire $x(t)$.

IV.D.3) Démontrer que la trajectoire $X(t)$ et sa symétrique $Z(t)$ séparent les trajectoires périodiques des trajectoires non périodiques.

IV.D.4) Représenter qualitativement les trois familles de trajectoires dans le plan P, avec les sens de parcours.

IV.E - On perturbe le pendule, et la fonction f devient ici $f(x) = -\cos(x) + \dfrac{1}{20}x^2$.

IV.E.1) Déterminer le nombre de points d'équilibre et leur stabilité.

IV.E.2) Démontrer que toutes les trajectoires sont ici du type II.E.1, à l'exception de celles passant par les équilibres instables.

IV.E.3) Établir un programme pour calculer la position du point d'équilibre $(e,0)$ le plus proche à droite de $(0,0)$.

••• FIN •••