Épreuve orale de Mathématiques II - Filière MP

Exemples d'exercices proposés lors de la session 2009

Énoncé 1

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note A_n la matrice suivante de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$: $A_n = \left[\dfrac{1}{i+j-1}\right]_{(i,j)\in[1,n]^2}$

1. a) Démontrer que pour tout $X = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$ {}^tXA_nX = \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n x_j t^{j-1}\right)^2 dt $$

b) Que peut-on en déduire en ce qui concerne les valeurs propres de A_n ?

On note désormais β_n la plus grande valeur propre de A_n.

2. En utilisant le logiciel de calcul formel, calculer une valeur approchée de β_n, pour $n \in \{1, \ldots, 20\}$.

3. a) Démontrer que $\beta_n = \max\limits_{\|x\|=1}({}^tXA_nX)$. ($\|\ .\ \|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbb{R}^n$ identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

b) Démontrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$:

$$ \int_{-1}^1 P(t)dt + i\int_0^\pi P(e^{i\theta})e^{i\theta}d\theta = 0 $$

c) En utilisant convenablement les questions précédentes, démontrer que $\beta_n \leqslant \pi$, puis démontrer que la suite $(\beta_n)_{n\in N^*}$ convergente.

4. Soit $W_n = {}^t(1, 1/\sqrt{2}, \ldots, 1/\sqrt{n}) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

a) Comparer, pour tout entier $n \geqslant 2$, les quantités ${}^tW_nA_nW_n$ et $\displaystyle\sum_{p=2}^n\left(\frac{1}{p-1}\sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{p-k}}\right)$. *On constatera d'abord que* ${}^tW_nA_nW_n = \displaystyle\sum_{p=2}^{2n}\left(\sum_{k+l=p}\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{l}}\right)\frac{1}{p-1}$.

b) En admettant l'inégalité suivante, pour $p \geq 2$:

$$ \sum_{k=1}^{p-1}\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{p-k}} \geq \int_1^{p-1}\frac{dx}{\sqrt{x(p-x)}} $$

déterminer la valeur de la limite de la suite $(\beta_n)_{n\in N^*}$. On pourra utiliser le logiciel de calcul formel pour calculer $\displaystyle\int_1^{p-1}\frac{dx}{\sqrt{x(p-x)}}$.

Énoncé 2

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on désigne par R_n la quantité suivante, dont on justifiera l'existence :

$$ R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}} $$

a.1. Déterminer avec le logiciel de calcul formel, une séquence de valeurs approchées de $|R_n|$ pour $n = 0, \ldots, 20$.

a.2. Étudier la monotonie de la suite $(|R_n|)$. Il sera commode d'établir l'égalité, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $R_n = (-1)^n\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+2k-1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2k}}\right)$.

b. Prouver la convergence de la série $\sum R_n$ de terme général R_n.

Utiliser le logiciel de calcul formel pour donner une valeur approchée de la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} R_n$ à 5.10^{-2} près, en justifiant l'approximation faite.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(n+1)t}}{\sqrt{t}\,(1+e^{-t})}dt$ et démontrer l'égalité :

$$ (-1)^n\int_0^{+\infty}\frac{e^{-(n+1)t}}{\sqrt{t}\,(1+e^{-t})}dt = \sqrt{\pi}\,R_n $$

On pourra utiliser le logiciel de calcul formel pour obtenir la valeur des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-(n+k+1)t}dt$, $k \in \mathbb{N}$.

d. Retrouver ainsi la convergence de la série $\sum R_n$ et donner sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n$ sous forme d'une intégrale.
En déduire avec le logiciel de calcul formel, une nouvelle valeur approchée de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} R_n$