PHYSIQUE

Les calculettes sont autorisées.

Éléments de cosmologie

Ce problème se propose d'établir quelques propriétés simples de l'Univers, telle qu'on les comprend actuellement, mais au moyen de modèles physiques simplifiés. À notre échelle, l'Univers est formé d'étoiles et de leurs planètes, regroupées en amas ou galaxies, ainsi que d'une certaine quantité de gaz interstellaire. Cependant, à plus vaste échelle, nous serons éventuellement amenés à traiter l'Univers comme un système fluide homogène.

Données :

Célérité de la lumière dans le vide	$c = 3,00 \cdot 10^{8}$ m.s^{-1}
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J.K^{-1}
Constante de la gravitation universelle	$\mathscr{G} = 6,67 \cdot 10^{-11}$ m^{3}.kg^{-1}.s^{-2}
Constante de Planck	$h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J.s
Durée d'une année	$365,25$jours $= 3{,}16 \cdot 10^{7}$s
Masse du Soleil	$M = 1,99 \cdot 10^{30}$ kg
Rayon du Soleil	$R = 6,95 \cdot 10^{8}$ m

Les quatre parties et de nombreuses questions peuvent être abordées de manière très largement indépendante.

Partie I - Déviation de la lumière par les étoiles

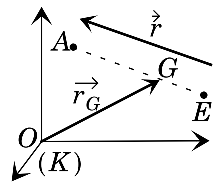
Cette partie étudie, dans un modèle non relativiste, la déviation d'une particule par une étoile E, considérée comme une répartition de masse à symétrie sphérique, de rayon R, de masse M et de centre O. La particule étudiée A est ponctuelle et de masse m. On considère le système formé de A et E comme isolé. Le référentiel d'étude (K) est galiléen.

Filière MP

I.A - Étude du système Σ formé de A et E

I.A.1) Définir le référentiel barycentrique du mouvement du système Σ relativement à (K) ; on le notera (K^*). Quelle propriété importante du référentiel (K^*) peut-on affirmer ?

I.A.2) On notera O un point fixe de (K), G le centre d'inertie du système Σ ; on notera $\overrightarrow{r_G} = \overrightarrow{OG}$. On notera aussi $\vec{r} = \overrightarrow{EA}$ (voir figure). Les dérivées temporelles successives, prises dans le référentiel (K), de ces vecteurs sont notées :



$$\overrightarrow{v_G} = \frac{d\overrightarrow{r_G}}{dt},\ \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt},\ \overrightarrow{\gamma_G} = \frac{d\overrightarrow{v_G}}{dt} \text{ et } \vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Exprimer la vitesse et l'accélération de A relativement à (K) en fonction de $\overrightarrow{v_G}$, $\vec{v}$, $\vec{\gamma}$ et des masses m et M.

I.A.3) Exprimer le moment cinétique $\overrightarrow{\sigma_0}$ en O du système Σ relativement à (K) en fonction de $\overrightarrow{r_G}$, $\overrightarrow{v_G}$, $\vec{r}$, $\vec{v}$ de $m_T = m + M$ et de la masse réduite μ définie par $1/\mu = 1/m + 1/M$.
Exprimer aussi l'énergie cinétique E_c du système Σ relativement à (K) en fonction de $\overrightarrow{v_G}$, $\vec{v}$, m_T et μ.

I.A.4) Expliciter l'équation différentielle du second ordre qui régit l'évolution de $\vec{r}$. On notera $r = \|\vec{r}\|$ et on supposera $r > R$.

I.A.5) En déduire la conservation du moment cinétique barycentrique $\overrightarrow{\sigma^*}$ du système. L'énergie cinétique barycentrique du système E_c^* se conserve-t-elle ?

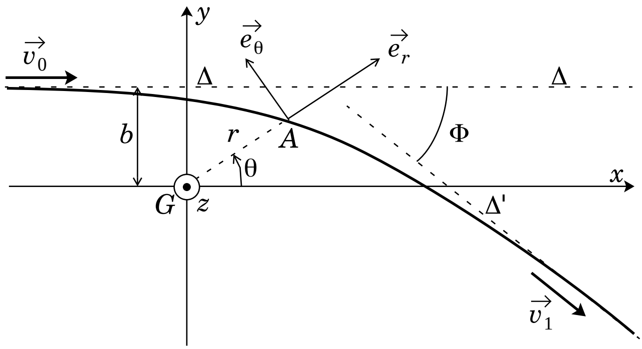
I.B - Trajectoires hyperboliques de la particule A

On se place dans toute la suite du problème dans le référentiel (K^*). On suppose que $M \gg m$.

I.B.1) Montrer dans ce cas que $\overrightarrow{GA} \approx \vec{r}$ et que la vitesse de A dans le référentiel barycentrique est voisine de $\vec{v}$. Relier de même les constantes du mouvement barycentrique $\overrightarrow{\sigma^*}$ et E_c^* au moment cinétique et à l'énergie cinétique de A dans le référentiel (K^*).

I.B.2) On supposera $r > R$. Quelle est l'équation du mouvement de A ? Montrer que le mouvement de A est plan.

On appellera Gxy le plan du mouvement ; on repère la position de A dans le plan Gxy par ses coordonnées polaires $r = GA$ et $\theta = (\vec{e}_x \cdot \vec{r})$. On notera $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$ la base locale polaire correspondante (voir figure ci-contre).



I.B.3) On pose

$$\overrightarrow{\sigma^*} \cdot \vec{e}_z = mC .$$

Expliciter C en fonction de r et $\dot{\theta} = d\theta/dt$, puis expliciter la dérivée $d\vec{v}/d\theta$ en fonction de $\mathcal{G}$, M et C. En déduire que le vecteur $\vec{e} = \alpha\vec{v} - \vec{e}_\theta$ est, pour un choix que l'on précisera de la constante α, une constante du mouvement.

Expliquer pourquoi on ne perd pas de généralité dans l'étude du mouvement en posant $\vec{e} = e\vec{e}_y$ avec $e > 0$.

I.B.4) À partir du résultat de la question précédente, exprimer $\vec{v} \cdot \vec{e}_\theta$ en fonction de α, e et θ ; en déduire l'équation de la trajectoire, qu'on écrira sous la forme $p/r = 1 + e\cos\theta$. Expliciter p en fonction de α et C, puis en fonction de C, $\mathcal{G}$ et M.

À quelle condition, portant sur e, la trajectoire de A est-elle hyperbolique ?

I.C - Étude de la trajectoire

On ne fait plus ici d'hypothèse particulière quant à la direction du vecteur $\vec{e}$ dans le plan Gxy du mouvement.

I.C.1) Lorsque la particule A est encore située à très grande distance de l'étoile E ($x_A \to -\infty$, voir la figure ci-dessus), sa vitesse $\vec{v}_0$ est colinéaire à Gx ; elle a pour norme v_0. L'asymptote Δ à cette trajectoire incidente passe à la distance b de G. Exprimer C en fonction de b et v_0 ; préciser en particulier le signe de C.

I.C.2) Lorsque la particule A s'est largement éloignée de l'étoile E, sa trajectoire est à nouveau une droite Δ' parcourue à la vitesse constante $\vec{v}_1$. Quelle est la norme de $\vec{v}_1$?

I.C.3) Exprimer, pour $t \to -\infty$ puis pour $t \to +\infty$, le vecteur $\vec{e}$ projeté sur la base $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ en fonction de α, v_0 et de l'angle de déviation Φ entre les droites Δ et Δ'.

En déduire une expression de $\tan(\Phi/2)$ en fonction de v_0, C, $\mathcal{G}$ et M.

I.C.4) Lors de son mouvement, la particule A passe à un certain instant à une distance minimale d du centre de l'étoile E. À partir par exemple de deux lois de conservation, déterminer une équation du second degré dont $1/d$ est solution. En déduire que :

$$d = \frac{C^2}{\mathcal{G}M + \sqrt{\mathcal{G}^2 M^2 + C^2 v_0^2}}.$$

I.C.5) Quel est le sens de variation, pour v_0 fixé, de la fonction $\Phi(d)$ reliant l'angle de déviation et la distance minimale d'approche ? Commenter.

I.C.6) Lorsque cette distance minimale correspond à une trajectoire rasante $(d = R)$, quelle est la valeur de la déviation Φ_0 ? On montrera que :

$$\tan\frac{\Phi_0}{2} = \frac{\mathcal{G}M}{v_0^2\sqrt{R(R+\rho)}}$$

où l'on exprimera ρ en fonction de $\mathcal{G}$, M, et v_0.

I.C.7) Déterminer numériquement ρ, appelé rayon de Schwarzschild, dans le cas du Soleil pour une particule de vitesse $v_0 \approx c$.

I.D - Déviation de la lumière par le Soleil

La lumière est ici traitée comme un faisceau de photons, particules dont la masse m n'a pas besoin d'être précisée dans la suite (même si on sait aujourd'hui qu'elle est nulle), et qu'on traitera dans le cadre de la mécanique non relativiste (même si cette approximation n'est pas légitime). Ces photons seront considérés comme soumis, comme une particule matérielle ordinaire, à l'interaction gravitationnelle avec l'étoile.

On admettra que, pour les photons passant à proximité du Soleil, $\rho \ll R$ (voir I.C.6).

I.D.1) Déterminer, en secondes d'arc, la déviation Φ_0 correspondant à un photon rasant le Soleil. On prendra $v_0 = c$.

I.D.2) Une expédition fut montée en mai 1919 pour observer cette déviation à l'occasion d'une éclipse de Soleil. La météo ne fut pas très bonne, pas plus donc que la qualité des observations ; toutefois, des mesures ultérieures menées lors de diverses éclipses de 1922 à 1999 confirmèrent progressivement une valeur mesurée expérimentalement $\Phi_e = 1,75''$.

Pourquoi la mesure doit-elle être menée lors d'une éclipse du Soleil ? Commenter la valeur de Φ_e.

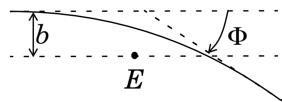
I.E - Effets de lentille gravitationnelle

La présence d'un astre massif E sur le trajet d'un faisceau de lumière parallèle provoque une déviation des rayons lumineux formant ce faisceau. L'angle de déviation Φ dépend de la distance b entre le rayon étudié et l'astre E, sous la forme

$$\Phi \approx \kappa \cdot \frac{\mathscr{G}M}{c^2 b}\text{, où M est la masse de l'astre } E.$$

I.E.1) Par analyse dimensionnelle, préciser l'unité de la grandeur constante κ.

I.E.2) Montrer que la déviation gravitationnelle de la lumière par l'astre E se comporte, pour un rayon passant à la distance b de l'astre E (cf. figure ci-contre), comme une *lentille convergente* dont on exprimera la distance focale f' en fonction de b, κ, c, $\mathscr{G}$ et M.



On considère un rayon lumineux rasant la surface du Soleil ; b est donc voisin du rayon R du Soleil.

I.E.3) Déterminer f' dans ces conditions ; on prendra $\kappa = 2$ SI et on exprimera le résultat en années-lumière (une année-lumière est la distance parcourue par la lumière pendant une année).

I.E.4) L'observation des astres lointains et peu lumineux est parfois améliorée lorsque s'interpose, sur le trajet de la lumière entre ces astres et la Terre, une galaxie massive. Pouvez-vous expliquer ce fait ?

Partie II - Thermodynamique des étoiles et galaxies

II.A - Stabilité des systèmes simples

On étudie d'abord un système mécanique simple, à un seul degré de liberté, entièrement caractérisé par son énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2}\mathscr{J}\dot{q}^2$ où $\mathscr{J}$ est une grandeur constante, positive. Toutes les actions mécaniques subies par ce système dérivent de son énergie potentielle E_p fonction du seul paramètre q : $E_p = E_p(q)$.

II.A.1) Étudier l'existence de positions q_0 d'équilibre du système et étudier la stabilité d'un équilibre pour des petits mouvements autour de cet équilibre. Montrer que la condition d'équilibre stable s'exprime en fonction de deux dérivées de la fonction énergie potentielle $E_p(q)$.

II.A.2) Expliquer brièvement pourquoi les conclusions de la question II.A.1 sont inchangées, même si l'énergie cinétique du système se met sous la forme

$$E_c = \frac{1}{2}\mathscr{J}(q)\dot{q}^2 \text{, où } \mathscr{J}(q) > 0 \text{ est une fonction de } q.$$

II.B - Instabilité des systèmes autogravitants

Nous admettrons ici qu'un système thermodynamique peut atteindre un équilibre stable si sa capacité thermique est positive. Le système Σ étudié ici est un système autogravitant (étoile, galaxie ou Univers considéré comme isolé), c'est-à-dire un système constitué de N particules dont l'interaction est seulement gravitationnelle. On notera $E_c(t)$ son énergie cinétique et $E_p(t)$ son énergie potentielle. On appelle viriel du système Σ la quantité définie par

$$\mathscr{V} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \vec{r}_i,$$

où $\vec{F}_i$ désigne la force exercée sur la particule i, placée au point $\vec{r}_i$. On note aussi $\langle f \rangle$ la moyenne temporelle d'une grandeur variable au cours du temps $f(t)$, définie comme la limite (si elle existe) :

$$\langle f \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} f(t)dt.$$

Sous certaines réserves qu'on supposera vérifiées, on peut montrer et *on admettra* que l'énergie cinétique moyenne du système est donnée par $2\langle E_c \rangle = -\langle \mathscr{V} \rangle$.

II.B.1) La force exercée sur la particule i du système s'écrit

$$\vec{F}_i = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \to i} \text{ où } \vec{F}_{j \to i} = -\frac{\mathscr{G} m_i m_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|^3}(\vec{r}_i - \vec{r}_j).$$

L'énergie potentielle d'interaction entre deux particules i et j peut s'écrire

$$E_p^{i,j} = -\frac{\mathscr{G} m_i m_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|}.$$

Parmi les deux expressions (1) et (2) ci-dessous, choisir celle qui exprime l'énergie potentielle d'interaction du système autogravitant tout entier ; justifier.

$$E_p = \sum_{i<j} E_p^{i,j} = -\mathscr{G}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{m_i m_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|} \text{, ou bien :} \qquad (1)$$

$$E_p = \sum_{i,j} E_p^{i,j} = -\mathscr{G}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{m_i m_j}{\|\vec{r}_i - \vec{r}_j\|} \qquad (2)$$

II.B.2) Par application du principe des actions réciproques (ou principe de l'action et de la réaction), regrouper, dans la somme qui définit le viriel, les particules par paires. En déduire que l'énergie potentielle $E_p(t)$ est liée très simplement au viriel $\mathscr{V}(t)$.

II.B.3) En déduire que l'énergie mécanique totale du système U vaut $U = -\langle E_c \rangle$.

II.B.4) On suppose que le centre d'inertie du système Σ est au repos dans le référentiel galiléen d'étude. Relier $\langle E_c \rangle$ à la température T du système Σ. En déduire que la capacité thermique isochore C_v d'un système autogravitant est négative, et qu'il est thermodynamiquement instable. Commenter.

II.B.5) Dans le cas du Soleil ou des autres étoiles en activité, qu'est-ce qui empêche leur effondrement ?

Partie III - Effet Doppler et Loi de Hubble

Compte tenu de l'instabilité des systèmes autogravitants, et donc de l'Univers lui-même, nous allons chercher à caractériser l'évolution de ce système au cours du temps, c'est-à-dire actuellement son expansion. La première évidence expérimentale acquise quant à cette expansion a été la loi de Hubble, dont la mise en évidence repose sur les propriétés de l'effet Doppler-Fizeau ou effet Doppler.

III.A - Effet Doppler

Considérons une onde monochromatique d'amplitude complexe a, se propageant dans la direction du vecteur unitaire $\vec{u}$, décrite dans le référentiel (K). Dans ce référentiel on note $(\vec{r}, t)$ la position et l'instant du passage de l'onde avec la phase φ, $a = a_0 \exp(i\varphi)$ où $\varphi = \omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}$ avec $\vec{k} = k\vec{u}$.

III.A.1) Dans un référentiel (K') en translation par rapport à (K) à la vitesse $\vec{V} = V\vec{u_x}$, indiquer la position $\vec{r}'$ et l'instant t' du même passage, dans le cadre de la mécanique classique.

III.A.2) La phase φ doit avoir même valeur dans les deux référentiels ; en déduire les formules de l'effet Doppler classique, liant les caractéristiques $(\omega, \vec{k})$ et $(\omega', \vec{k'})$ de l'onde dans (K') et (K).

III.A.3) Relier les vitesses de phase et de groupe v_ϕ et v_g de l'onde a dans les deux référentiels. Commenter.

III.A.4) Expliquer pourquoi ces deux lois sont en fait incompatibles avec les lois de propagation des ondes électromagnétiques, déduites des équations de Maxwell.

III.A.5) Nous admettrons que, dans le cadre de la mécanique relativiste, la loi de transformation de la pulsation d'une onde électromagnétique ou lumineuse est : $\omega' = \gamma\omega(1 - \beta\vec{u} \cdot \vec{u}_x)$ où $\beta = V/c$ et $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, où on note c la célérité de la lumière dans le vide. En déduire la relation liant les longueurs d'onde λ et λ' de la lumière dans (K) et (K'). Que deviennent ces expressions de ω' et λ' si la vitesse V de changement de référentiel est faible devant celle de la lumière ? Comparer à l'effet Doppler-Fizeau classique étudié en III.A.2.

III.B - Loi de Hubble

Lorsqu'une onde électromagnétique est émise à la longueur d'onde λ, relativement au référentiel (K) de l'émetteur, cette même onde sera reçue par un récepteur fixe dans le référentiel (K'), mais qui s'éloigne longitudinalement de (K) à la vitesse V, avec une longueur d'onde λ' différente de λ. La relation qui lie λ et λ' est :

$$\lambda' = \lambda\left(1 + \frac{V}{c}\right) .$$

On rappelle que le spectre de rayonnement d'une étoile de température de surface T, assimilé à une émission thermique, est donné par la loi de Planck qui donne la puissance rayonnée par unité de surface de l'étoile dP_u entre les longueurs d'onde λ et $\lambda + d\lambda$:

$$dP_u = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1} d\lambda$$

où h est la constante de Planck et k_B la constante de Boltzmann. On appelle λ_m la valeur de λ pour laquelle la fonction $dP_u/d\lambda$ présente un maximum.

III.B.1) Donner une expression approchée de la relation liant λ_m, T, h, c et k_B. On pourra supposer que, au voisinage de ce maximum λ_m, $\exp(hc/k\lambda_m T) \gg 1$, avant de vérifier la validité de cette approximation.

III.B.2) Calculer λ_m pour une étoile de température de surface $T = 6000\ \mathrm{K}$. À quel domaine du spectre électromagnétique correspond λ_m ?

III.B.3) Expliquer brièvement pourquoi, compte tenu de la forme de la distribution de Planck au voisinage de son maximum, la mesure du déplacement de λ_m par effet Doppler ne constitue pas une méthode précise de mesure de la vitesse V de l'étoile émettrice par rapport au système solaire.

III.B.4) En vous basant sur les propriétés de l'absorption de la lumière par les atomes, montrer que la présence d'une couche d'atomes froids entourant une étoile permet de proposer une méthode plus précise de mesure de V.

L'astrophysicien américain Hubble a, le premier, appliqué cette méthode de façon systématique, montrant une relation linéaire entre la vitesse d'éloignement des galaxies et leur distance au système solaire : c'est la *loi de Hubble*. D'après celle-ci, une galaxie (ou une étoile) A située à la distance $R(t)$ d'une origine arbitraire s'éloigne de ce point O avec une vitesse radiale $V_o(A, t) = H(t)R(t)$, où la grandeur $H(t)$, identique pour toutes les galaxies (ou étoiles), porte le nom de *constante de Hubble*. On peut aussi écrire vectoriellement la vitesse de la galaxie (ou étoile) A sous la forme $\overrightarrow{V_o}(A, t) = H(t)\overrightarrow{OA}$.

III.B.5) Soit O' un point lié à une galaxie quelconque de l'Univers. Déterminer la vitesse $\overrightarrow{V_{o'}}(A, t)$ de la galaxie A par rapport à O'. En déduire que la loi de Hubble est vérifiée avec une origine quelconque O', avec la même constante de Hubble $H(t)$. Commenter.

III.B.6) Une étoile E émet un rayon lumineux vers le point O, avec $OE = R(t)$; en admettant que $H(t)$ et $R(t)$ restent quasiment constantes au cours du laps de temps qui sépare le voyage d'un rayon lumineux depuis son étoile d'émission jusqu'à son point de réception, calculer la variation relative $\Delta\lambda/\lambda$ de longueur d'onde due à l'effet Doppler entre émission et réception, en fonction de $H(t)$, $R(t)$ et c.
On dira qu'il y a *dilatation commune de toutes les longueurs* au cours de l'expansion, qu'il s'agisse de distances matérielles ou de longueurs caractéristiques, comme les longueurs d'onde.

Partie IV - Échelle de temps de l'expansion

IV.A - Refroidissement de l'Univers

IV.A.1) À tout instant t, l'Univers peut être considéré comme un émetteur thermique à la température $T(t)$. On montre (Partie III), qu'au cours de l'évolution de l'Univers, la longueur d'onde d'un photon quelconque varie proportionnellement aux dimensions caractéristiques de l'Univers. En déduire qu'un Univers en expansion se refroidit.

La loi de Wien pour un émetteur thermique donne la longueur d'onde du maximum d'émission λ_m en fonction de la température T sous la forme $\lambda_m T \approx 3,0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m \cdot K}$.

IV.A.2) Quelle est la température actuelle de l'Univers si la longueur d'onde du maximum de l'émission est égale à $1,1\ \mathrm{mm}$? Dans quel domaine spectral se trouve ce maximum d'émission ?

IV.B - Ère à dominante matérielle

Actuellement, l'énergie mécanique de l'Univers est essentiellement présente sous forme matérielle, énergie mécanique de particules en interaction gravitationnelle. Nous décrirons l'Univers comme un fluide homogène de masse volumique $\rho(t)$, ayant la symétrie de révolution autour d'une étoile centrale O arbitraire. L'expansion de l'Univers est décrite par la loi de Hubble (voir III.B.4).

IV.B.1) Une étoile A de masse m se situe, à l'instant t, à la distance $R(t)$ de O. Montrer que la masse M_R contenue à l'intérieur de la sphère de centre O et de rayon $R(t)$ est constante au cours du temps.

Donner l'expression du champ de gravitation exercé sur l'étoile A, assimilée à un point matériel, en fonction de $\mathcal{G}$, M_R et $R(t)$. En déduire l'énergie potentielle E_p de A en fonction de $\mathcal{G}$, m, M_R et $R(t)$ puis en fonction de $\mathcal{G}$, m, $R(t)$ et $\rho(t)$. On choisira $E_p = 0$ si $R(t) = 0$.

IV.B.2) Déterminer l'énergie mécanique totale E de la même étoile, en fonction de m, R, ρ, $\mathcal{G}$ et de la constante de Hubble $H(t)$.

IV.B.3) Montrer que le caractère *ouvert* ou *fermé* de l'Univers, c'est-à-dire la possibilité pour les étoiles de s'éloigner indéfiniment les unes des autres, dépend seulement de la valeur de $\rho(t)$ relativement à une valeur critique ρ_c qu'on exprimera en fonction de $H(t)$ et $\mathcal{G}$.

IV.B.4) H vaut actuellement $15\ \mathrm{km\cdot s^{-1}}$ par million d'années-lumière (une année-lumière est la distance parcourue par la lumière à la vitesse c pendant une année). Calculer la valeur actuelle de ρ_c.

IV.B.5) En exprimant la conservation de la masse, montrer que $\rho(t)$ varie proportionnellement à $R^n(t)$ et préciser l'entier n.

IV.C - Ère à dominante radiative

Dans les premiers temps de l'Univers, l'essentiel de l'énergie de celui-ci était présent sous forme de rayonnement électromagnétique ; nous admettrons dans la suite que lors d'une telle période, on peut utiliser les résultats de la mécanique classique à condition de remplacer la densité volumique $\rho(t)$ par le rapport $\rho(t) = u(t)/c^2$, où $u(t)$ est la densité volumique d'énergie électromagnétique à l'instant t ; il s'agit simplement d'une extension de la relation classique d'équivalence masse-énergie $E = mc^2$.

IV.C.1) Exprimer la puissance dP_u partant de l'unité de surface d'un émetteur thermique à la température T et dont la fréquence est située entre les valeurs ν et $\nu + d\nu$, en fonction de h, c, k_B, T, ν, $d\nu$ et de la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{x^3}{\exp(x) - 1} \quad \text{où l'on a posé } x = \frac{h\nu}{k_B T}$$

IV.C.2) On donne la valeur de l'intégrale.

$$\int_0^{\infty} f(x)dx = \frac{\pi^4}{15}.$$

En déduire la puissance P_u rayonnée, par unité de surface de l'émetteur thermique, sur l'ensemble du spectre électromagnétique, en fonction de T et de constantes universelles.

IV.C.3) En admettant que la densité volumique d'énergie électromagnétique u et la puissance rayonnée P_u vérifient la relation $cu = 4P_u$, montrer que $\rho(t)$ est proportionnel à $R^{-4}(t)$; on pourra utiliser le résultat établi dans la partie III : les dimensions λ et R varient proportionnellement au cours du temps.

IV.D - L'âge de l'Univers

Selon l'ère étudiée (dominante radiative au début, matérielle ensuite), on écrira la masse volumique de l'Univers sous la forme $\rho(t) = K_p R^p(t)$ où p vaut -4 au début de l'histoire de l'Univers et -3 ensuite ; la constante K_p n'a évidemment pas la même valeur dans les deux cas. Dans les deux cas, on supposera que l'Univers est très proche de la situation critique décrite en IV.B.4, donc que la constante de Hubble $H(t)$ s'écrit :

$$H(t) = \sqrt{\frac{8\pi\mathcal{G}\rho(t)}{3}}.$$

IV.D.1) En utilisant la loi de Hubble, établir une équation différentielle pour $R(t)$ en fonction de p, $\mathcal{G}$ et K_p.

IV.D.2) Montrer que la durée séparant deux instants t_1 et t_2 est liée aux masses volumiques en ces deux instants, selon :

$$t_2 - t_1 = \frac{2}{|p|}\sqrt{\frac{3}{8\pi\mathcal{G}}}\left[\frac{1}{\sqrt{\rho(t_2)}} - \frac{1}{\sqrt{\rho(t_1)}}\right].$$

IV.D.3) Pendant l'ère à dominante radiative,

$$\rho = \alpha T^4 \text{ où } \alpha = 1,22 \cdot 10^{-32}\ \mathrm{kg \cdot m^{-3} \cdot K^{-4}}.$$

Calculer la durée nécessaire pour que l'Univers se refroidisse depuis sa température initiale ($T_i > 10^8\ \mathrm{K}$) jusqu'à $10^7\ \mathrm{K}$ puis jusqu'à $3000\ \mathrm{K}$.

IV.D.4) En utilisant la relation établie en IV.D.2 de manière approchée avec une valeur moyenne de p, évaluer l'âge de l'Univers. On prendra pour masse volumique actuelle de l'Univers la valeur $\rho_c = 4,5 \cdot 10^{-27}\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}$.

••• FIN •••
