Mathématiques 1

MP **2014**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrices autorisées

L'objet de ce problème est l'étude de certaines fonctions définies sur des espaces de matrices.

Dans tout le problème, on fixe un entier $d \in \mathbb{N}^*$ et on note $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$) l'espace des matrices carrées à coefficients réels (respectivement complexes) de taille $d \times d$. Si i et j sont deux entiers entre 1 et d, on note $A_{i,j}$ le coefficient placé ligne i et colonne j dans la matrice A. On rappelle que $A^0 = I_d$. On note $\mathrm{Tr}(A)$ la trace de la matrice A.

Les parties I, II et III sont indépendantes des parties IV et V.

I Une norme utile sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$

I.A – Montrer que, pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$, l'application $f_P : A \mapsto P(A)$ est une fonction continue de $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

I.B – Montrer que l'application $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tA \times B)$ est un produit scalaire sur l'espace $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

Dans toute la suite du problème, on note $\|\cdot\|$ la norme associée à ce produit scalaire.

I.C – Pour tous entiers i, j entre 1 et d et toute matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, comparer $|A_{i,j}|$ et $\|A\|$.

I.D – Montrer que : $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})^2$, $\|A \times B\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$.

I.E – Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, comparer $\|A^n\|$ et $\|A\|^n$.

II Séries entières de matrices

Dans cette partie, on se donne une série entière à coefficients complexes $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ de rayon de convergence R strictement positif, éventuellement égal à $+\infty$.

II.A – Soit $\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \|A\| < R\}$. Montrer que l'application $\varphi : A \mapsto \varphi(A) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n A^n$ est définie et continue sur $\mathcal{B}$.

II.B – Soit $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ une matrice non nulle telle que $\|A\| < R$.

II.B.1) Établir l'existence d'un entier $r \in \mathbb{N}^*$ tel que la famille $(A^k)_{0\leqslant k\leqslant r-1}$ soit libre et la famille $(A^k)_{0\leqslant k\leqslant r}$ soit liée.

II.B.2) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer l'existence et l'unicité d'un r-uplet $(\lambda_{0,n}, \dots, \lambda_{r-1,n})$ dans $\mathbb{R}^r$ tel que

$$A^n = \sum_{k=0}^{r-1} \lambda_{k,n} A^k$$

II.B.3) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{r-1} |\lambda_{k,n}| \leqslant C\|A^n\|$$

II.B.4) En déduire que, pour tout entier k entre 0 et $(r-1)$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n \lambda_{k,n}$ est absolument convergente dans $\mathbb{C}$.

II.B.5) Conclure qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\varphi(A) = P(A)$ et $\deg P < r$.

II.B.6) Déterminer ce polynôme P lorsque $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $a_n = \dfrac{1}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.C – Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n z^n$ pour qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \quad \varphi(A) = P(A)$$

III Deux applications

III.A – Première application : une formule de trigonométrie matricielle

III.A.1) Rappeler l'énoncé du théorème permettant de faire le produit de deux séries de nombres complexes.

On admet dans la suite de la partie III que le résultat valable pour les séries de nombres complexes est encore valable pour des séries de matrices dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$.

III.A.2) Pour $(A,B) \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})^2$ tel que A et B commutent, montrer que $\exp(\mathrm{i}A)\exp(\mathrm{i}B) = \exp(\mathrm{i}(A+B))$.

III.A.3) Pour tout $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, on pose

$$\cos(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{A^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{A^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Montrer

$$\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \quad \cos(A)^2 + \sin(A)^2 = I_d$$

III.B – Seconde application : le théorème de Cayley-Hamilton

On fixe une matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$.

III.B.1) Pour R assez grand, montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la matrice $(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} I_d - A)$ est inversible dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{C})$, et que son inverse est la matrice

$$(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^{-1} \sum_{n=0}^{+\infty} (R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^{-n} A^n$$

III.B.2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout R assez grand, la matrice

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^n (R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} I_d - A)^{-1} \,\mathrm{d}\theta$$

vaut A^{n-1}.

III.B.3) On considère le polynôme caractéristique

$$\chi_A(X) = \det(A - X \cdot I_d) = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$$

Montrer que pour R assez grand :

$$\chi_A(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \chi_A(R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) (R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} I_d - A)^{-1} \,\mathrm{d}\theta$$

III.B.4) En déduire que $\chi_A(A)$ est la matrice nulle.

On pourra faire intervenir des comatrices.

IV Étude d'une équation fonctionnelle

Soit $M \in \mathbb{R}_+^* \cup \{+\infty\}$ et $f :]-\infty, M[\to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall (x,y) \in \left]-\infty, \frac{M}{2}\right[^2, \quad 2f(x+y) = f(2x) + f(2y) \tag{IV.1}$$

IV.A – Soit α un nombre strictement inférieur à $\dfrac{M}{2}$ et F la primitive de f s'annulant en α. Montrer que pour tous x et y dans $\left]-\infty, \dfrac{M}{2}\right[$, avec $y \neq \alpha$, on a :

$$f(2x) = 2\frac{F(x+y) - F(x+\alpha) - \frac{1}{4}F(2y) + \frac{1}{4}F(2\alpha)}{y - \alpha}$$

IV.B – En déduire que la fonction f est de classe C^∞ sur $]-\infty, M[$.

IV.C – Montrer que $f'' = 0$, puis que l'ensemble des solutions continues de l'équation (IV.1) forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, dont on déterminera une base.

V Étude d'une autre fonction matricielle

Dans cette partie, on se donne une fonction $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et on définit une fonction $f_\xi : \mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \quad f_\xi(A) = \Big(\xi(A_{i,j})\Big)_{1\leqslant i,j\leqslant d}$$

On se propose de déterminer les fonctions continues $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R}), \quad A \text{ inversible } \Rightarrow f_\xi(A) \text{ inversible} \tag{V.1}$$

V.A – Déterminer les fonctions continues ξ vérifiant la condition (V.1) lorsque $d = 1$.

On se place dorénavant dans le cas $d \geqslant 2$.

On se donne une fonction continue ξ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (V.1).

V.B – Montrer

$$\forall (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4, \quad ad \neq bc \Rightarrow \xi(a)\xi(d) \neq \xi(b)\xi(c)$$

On pourra considérer la matrice $\begin{pmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ c & d & 0 & \cdots & 0 \\ c & d & & & \\ \vdots & \vdots & & I_{d-2} & \\ c & d & & & \end{pmatrix}$.

V.C – En déduire que la fonction ξ est injective, puis qu'elle est strictement monotone sur $\mathbb{R}$.

V.D – Montrer que la fonction ξ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$.

V.E – Le but de cette question est de montrer $\xi(0) = 0$.

V.E.1) Montrer que si $\xi(0) \neq 0$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que $\xi(0)\xi(2) = \xi(1)\xi(\alpha)$.

V.E.2) Conclure.

V.F – Soit $\eta = \xi^{-1} : I \to \mathbb{R}$ la fonction réciproque de la bijection $\xi : \mathbb{R} \to I$. Montrer que là où cela est défini

$$\big(\eta(xy)\big)^2 = \eta(x^2)\eta(y^2)$$

V.G – On suppose dans cette question que la fonction η prend des valeurs strictement positives sur $I \cap]0, +\infty[$.

V.G.1) Montrer que la fonction $f = \ln \circ \eta \circ \exp$ vérifie l'équation (IV.1) sur un intervalle $]-\infty, M[$, avec M (éventuellement infini) à préciser en fonction de l'intervalle I.

V.G.2) En déduire que sur l'intervalle $I \cap]0, +\infty[$ la fonction η est de la forme

$$\eta : x \mapsto K_1 x^{\alpha_1}$$

avec deux constantes $K_1 > 0$ et $\alpha_1 > 0$.

V.G.3) Montrer que sur l'intervalle $I \cap]-\infty, 0[$ la fonction η est de la forme

$$\eta : x \mapsto K_2(-x)^{\alpha_2}$$

avec deux constantes $K_2 < 0$ et $\alpha_2 > 0$.

V.G.4) Montrer que $I = \mathbb{R}$ puis que la fonction η est une fonction impaire.

V.H – En déduire dans le cas général que, si $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue vérifiant la condition (V.1), alors elle est impaire et sa restriction à $\mathbb{R}_+^*$ est de la forme $x \mapsto Cx^\beta$, avec $C \neq 0$ et $\beta > 0$.

V.I – Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer le déterminant de la matrice $A_\lambda \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ ne comportant que des 1 hors de la diagonale et que des λ sur la diagonale.

V.J – En déduire toutes les fonctions continues $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant (V.1).

• • • FIN • • •