Mathématiques 2

PSI

2016

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrices autorisées

Ce problème aborde l'étude de deux transformations intégrales utilisées pour le traitement des signaux analogiques : la transformation de Fourier et celle de Laplace. Chacune d'elles permet de modéliser le comportement fréquentiel d'un signal. La partie I étudie quelques propriétés de la transformée de Fourier d'un signal analogique continu par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$. La partie II aboutit à la formule d'inversion de Fourier qui permet de retrouver un signal à partir de sa transformée de Fourier. La partie III traite le cas particulier d'un signal dont le spectre des fréquences est limité à $[-1/2, 1/2]$. La partie IV étudie le cas particulier d'un signal périodique. Le résultat auquel elle aboutit est utilisé dans la partie V pour démontrer le théorème de l'échantillonnage de Shannon. La partie VI utilise un résultat classique de probabilité pour démontrer l'injectivité de la transformation de Laplace sur l'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ et nulles hors d'un segment.

On note

- E_{cpm} le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues par morceaux sur $\mathbb{R}$ et intégrables sur $\mathbb{R}$;
- $\mathcal{S}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\forall k \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto x^k f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

I Transformation de Fourier

Pour toute fonction $f \in E_{\text{cpm}}$, on considère la fonction $\mathcal{F}(f)$ (*transformée de Fourier de* f) définie par

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-2\pi i t\xi} \, \mathrm{d}t$$

I.A – On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Justifier que φ appartient à E_{cpm} et calculer sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(\varphi)$.

I.B – On considère la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad \psi(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \qquad \text{et} \qquad \psi(0) = 1$$

I.B.1) Justifier que ψ est développable en série entière. Préciser ce développement ainsi que son rayon de convergence. En déduire que ψ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

I.B.2) Prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \int_n^{n+1} |\psi(x)| \, \mathrm{d}x \geqslant \frac{2}{(n+1)\pi^2}$$

En déduire que ψ n'appartient pas à E_{cpm}.

I.C – Soit $f \in E_{\text{cpm}}$. Montrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

I.D – Soit $f \in \mathcal{S}$.

I.D.1) Justifier que, pour tout entier naturel n, la fonction $x \mapsto x^n f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

I.D.2) Démontrer que la fonction $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \left(\mathcal{F}(f)\right)^{(n)}(\xi) = (-2\pi i)^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) e^{-2\pi i t\xi} \, \mathrm{d}t$$

I.E – On considère la fonction $\theta : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $\theta(x) = \exp\left(-\pi x^2\right)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

I.E.1) Justifier que θ appartient à $\mathcal{S}$ et que $\mathcal{F}(\theta)$ est solution de l'équation différentielle

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad y'(\xi) = -2\pi\xi \, y(\xi)$$

I.E.2) Établir que $\mathcal{F}(\theta) = \theta$.

On admettra que $\int_{-\infty}^{+\infty} \theta(x) \, \mathrm{d}x = 1$.

II Formule d'inversion de Fourier

Soit $f \in \mathcal{S}$. On suppose que $\mathcal{F}(f)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi)\theta\left(\frac{\xi}{n}\right) \mathrm{d}\xi \qquad\qquad J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} f\left(\frac{t}{n}\right) \mathcal{F}(\theta)(t) \,\mathrm{d}t$$

II.A – Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi)\,\mathrm{d}\xi$.

II.B – Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} J_n$.

II.C – Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = J_n$.

On admettra la formule de Fubini :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\theta\left(\frac{\xi}{n}\right) e^{-2\pi \mathrm{i} t\xi}\,\mathrm{d}\xi\right) \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\theta\left(\frac{\xi}{n}\right) e^{-2\pi \mathrm{i} t\xi}\,\mathrm{d}t\right) \mathrm{d}\xi$$

II.D – Démontrer que $f(0) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi)\,\mathrm{d}\xi$.

En déduire, en utilisant la fonction $h : t \mapsto f(x+t)$, que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{2\pi \mathrm{i} x\xi}\,\mathrm{d}\xi \tag{II.1}$$

Cette formule permet de reconstruire le signal f à partir de sa transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$.

II.E – ***Une application***

Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2\pi \mathrm{i} x\xi}}{1+(2\pi\xi)^2}\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2} e^{-|x|}$.

III Transformée de Fourier à support compact

Soit f une fonction de $\mathcal{S}$ dont la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ est nulle en dehors du segment $[-1/2, 1/2]$. D'après la relation II.1, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_{-1/2}^{1/2} \mathcal{F}(f)(\xi) e^{2\pi \mathrm{i} x\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

III.A – Démontrer que $\mathcal{F}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que $\mathcal{F}(f) \in \mathcal{S}$. En déduire que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

III.B – Prouver que

$$\forall (x, x_0) \in \mathbb{R}^2, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} \int_{-1/2}^{1/2} (2\pi \mathrm{i}\xi)^n \mathcal{F}(f)(\xi) e^{2\pi \mathrm{i} x_0 \xi}\,\mathrm{d}\xi = f(x)$$

III.C – On suppose que f est nulle en dehors d'un segment $[a, b]$. Montrer que $f = 0$.

IV Cas des fonctions périodiques

Pour tout entier naturel n, on note S_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{2\pi \mathrm{i} kx}$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et 1-périodique. On considère :

- la fonction g définie sur $[-1, 1]$ par

$$\forall x \in\,]-1, 1[\setminus \{0\},\ g(x) = \frac{f(x) - f(0)}{\sin(\pi x)} \qquad g(0) = \frac{f'(0)}{\pi} \qquad g(1) = g(-1) = -g(0)$$

- la suite de complexes $\big(c_n(f)\big)_{n\in\mathbb{Z}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \int_{-1/2}^{1/2} f(x) e^{-2\pi \mathrm{i} nx}\,\mathrm{d}x$$

IV.A –

IV.A.1) Montrer que la fonction g est de classe C^1 sur $]-1,1[\setminus\{0\}$ et continue sur $]-1,1[$.

IV.A.2) Calculer la limite de g' en 0. En déduire que g est de classe C^1 sur $]-1,1[$.

On admet dorénavant que g est de classe C^1 sur $[-1,1]$.

IV.B – Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} S_n(x)\,\mathrm{d}x$.

IV.C – Démontrer que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \forall x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]\setminus\{0\},\quad S_n(x)=\frac{\sin((2n+1)\pi x)}{\sin(\pi x)}$$

IV.D – Justifier que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)=f(0)+\int_{-1/2}^{1/2} g(x)\sin((2n+1)\pi x)\,\mathrm{d}x$$

IV.E – À l'aide d'une intégration par parties, montrer l'existence d'un réel C tel que

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad \left|\int_{-1/2}^{1/2} g(x)\sin((2n+1)\pi x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{C}{2n+1}$$

IV.F – Soit $t\in[-1/2,1/2]$. On considère la fonction G_t définie sur $[-1/2,1/2]$ par

$$\forall x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],\quad G_t(x)=f'(x+t)\sin(\pi x)-(f(x+t)-f(t))\pi\cos(\pi x)$$

Établir l'existence d'un réel D, indépendant de x et de t, tel que

$$\forall t\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],\quad \forall x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],\quad |G_t(x)|\leqslant Dx^2$$

IV.G – Prouver l'existence d'un réel E tel que

$$\forall t\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right],\quad \left|f(t)-\sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{2\pi\mathrm{i}kt}\right|\leqslant\frac{E}{2n+1} \tag{IV.1}$$

On pourra introduire la fonction $h_t : x\mapsto f(x+t)$.

V Formule d'échantillonnage de Shannon

Soit $f\in\mathcal{S}$ dont la transformée de Fourier $\mathcal{F}(f)$ est nulle en dehors du segment $[-1/2,1/2]$. On pose

$$\forall k\in\mathbb{Z},\quad \forall x\in\mathbb{R},\quad \psi_k(x)=\psi(x+k) \tag{V.1}$$

où ψ est définie à la question I.B.

V.A – Justifier que $\forall n\in\mathbb{N},\quad (\mathcal{F}(f))^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)=(\mathcal{F}(f))^{(n)}\left(-\frac{1}{2}\right)=0$.

V.B – Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$, qui est 1-périodique et qui vaut $\mathcal{F}(f)$ sur l'intervalle $[-1/2,1/2]$. Montrer que h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

V.C – À l'aide de l'inégalité IV.1, prouver l'existence d'une suite de nombres complexes $(d_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ telle que la suite de fonctions $\left(x\mapsto\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} d_k e^{2\pi\mathrm{i}kx}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\mathcal{F}(f)$ sur $[-1/2,1/2]$.

V.D – Démontrer que la suite de fonctions $\left(\displaystyle\sum_{k=-n}^{n} d_k\psi_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

On notera symboliquement $f=\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k\psi_k$.

V.E – Établir que $\forall j\in\mathbb{Z},\ f(-j)=d_j$.

L'égalité $f=\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(-k)\psi_k$ traduit la reconstruction du signal f à partir de l'échantillon $(f(k))_{k\in\mathbb{Z}}$.

VI Transformation de Laplace

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ une fonction continue et nulle en dehors d'un segment. On définit la fonction $\mathcal{L}(f)$ (*transformée de Laplace de* f) sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

On admettra que $\mathcal{L}(f)$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \big(\mathcal{L}(f)\big)^{(n)}(x) = (-1)^n \int_0^{+\infty} f(t)t^n e^{-xt}\,\mathrm{d}t$$

Rappelons que, pour tout réel x, $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

VI.A – On considère $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, mutuellement indépendantes et suivant la même loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

VI.A.1) Par récurrence, démontrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, S_n suit la loi de Poisson de paramètre $n\lambda$.

On admettra que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, les variables S_n et X_{n+1} sont mutuellement indépendantes.

VI.A.2) Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(|S_n - n\lambda| \geqslant n\varepsilon) \leqslant \frac{\lambda}{n\varepsilon^2}$$

VI.A.3) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier les deux inclusions suivantes

$$\big(S_n > n(\lambda + \varepsilon)\big) \subset \big(|S_n - n\lambda| \geqslant n\varepsilon\big)$$
$$\big(S_n \leqslant n(\lambda - \varepsilon)\big) \subset \big(|S_n - n\lambda| \geqslant n\varepsilon\big)$$

VI.A.4) Dans toutes les questions qui suivent, on suppose $x \geqslant 0$.

Déduire du VI.A.3 que

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n \leqslant nx) = 0 & \text{si } 0 \leqslant x < \lambda \\ \lim\limits_{n\to+\infty} P(S_n \leqslant nx) = 1 & \text{si } x > \lambda \end{cases}$$

VI.B – À l'aide de la question VI.A, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{0\leqslant k\leqslant\lfloor nx\rfloor} \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x < \lambda \\ 1 & \text{si } x > \lambda \end{cases}$$

VI.C – Dans la suite de cette partie, on admettra que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{0\leqslant k\leqslant\lfloor nx\rfloor} \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda} = \frac{1}{2} \quad \text{si } x = \lambda$$

VI.C.1) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Démontrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{0\leqslant k\leqslant\lfloor nx\rfloor} (-1)^k \frac{n^k}{k!} \big(\mathcal{L}(f)\big)^{(k)}(n) = \int_0^x f(y)\,\mathrm{d}y$$

VI.C.2) En déduire que l'application $\mathcal{L} : f \mapsto \mathcal{L}(f)$ est injective sur l'ensemble des fonctions à valeurs complexes, continues sur $\mathbb{R}_+$ et nulles en dehors d'un segment.

• • • FIN • • •
