Mathématiques 2

Présentation du sujet

Ce problème s'intéresse à des fonctions ne s'exprimant pas à l'aide des fonctions usuelles, définies comme réciproques sur certains intervalles de la fonction $x \mapsto x\mathrm{e}^x$. On établit diverses propriétés de ces fonctions, en particulier le fait que l'une d'elle est développable en série entière au voisinage de zéro. Deux applications en probabilité sont mises en avant.

Ce sujet, d'une longueur très raisonnable, comporte plusieurs parties assez indépendantes et permet de contrôler les connaissances des candidats dans des domaines variés d'analyse et de probabilité de première et seconde année.

Il n'encourage cependant pas le grappillage, chaque question nécessitant soit une bonne compréhension du contexte soit une vraie connaissance du cours. Quelques questions plus difficiles n'ont été comprises que par les meilleurs candidats.

Analyse globale des résultats

Les candidats ont su exploiter le sujet pour montrer leurs compétences en choisissant les parties les plus à leurs convenances et ne sont jamais restés bloqués sur un point. La plupart des questions est assez simple et a permis de bien classer les candidats en fonction de leur compréhension de la question, de la précision des connaissances et de la rigueur de la réponse.

Le jury a été agréablement surpris par la gestion de certains calculs, par le nombre de candidats ayant su obtenir l'identité d'Abel et son corollaire et globalement par les connaissances en probabilité. En revanche très peu de candidats sont capables de résoudre une équation différentielle linéaire aussi simple que $xy' = y$

Par ailleurs le jury a moins apprécié la présentation des copies, l'écriture et l'abus d'abréviations mystérieuses et, bien pire encore, les contre vérités flagrantes, surtout accompagnées de « d'après le cours », et les escroqueries.

Les meilleurs candidats sont ceux qui prennent le temps de comprendre chaque question et d'argumenter chaque réponse.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Le cours rarement utilisé avec assez de précision

En Q1 et Q8 entre continuité, stricte monotonie (justifiée) et limite en l'infini il y a souvent au moins un argument manquant.

Le résultat concernant la dérivabilité de la réciproque n'est pas connu.

En Q12 et 16 il était indispensable d'utiliser l'indépendance et, si tous les candidats connaissent l'espérance des lois usuelles, la variance a moins de succès.

En Q13 et 17 avant d'appliquer l'inégalité de Markov il fallait préciser positivité (et intégrabilité).

La Q28 a donné lieu à moins de 40 % de bonne réponses pour la valeur des dérivés en 0.

En Q30 pour effectuer un produit de Cauchy il est souhaitable de regarder le rayon des deux séries entières et, lorsque le terme constant de l'une est nul, de s'en apercevoir.

Des questions pas toujours assez comprises

En Q11 les paramètres a et b sont non nuls, inutile de discuter ces cas particuliers ; le sujet demande explicitement d'utiliser les fonctions V et W.

En Q22 la formule $A'_k(X) = A_{k-1}(X-a)$ a souvent été mal comprise, le membre de droite étant vu comme un produit au lieu d'une composition. Un argument de degré rendait cette interprétation impossible.

Le cours doit être cité parfaitement, mais il n'est pas utile de le redémontrer (sauf mention explicite d'une question de cours). De nombreux candidats ont perdu du temps en déterminant espérance et variance de loi de Poisson, binomiale, ou des points en donnant une justification complètement erronée de la régularité d'une série entière sur l'intervalle ouvert de convergence

Manque de soin, incohérence

En Q3 la moitié des réponses sont fausses, il suffisait pourtant de connaitre la dérivée d'une réciproque, et plus grave la contradiction avec le graphe de Q5 n'est jamais signalée.

En Q5 moins de 40 % des candidats proposent un graphe soigné avec des tangentes mises en évidence. Rappelons qu'une verticale ne coupe jamais le graphe d'une fonction en plus d'un point.

En Q6 des erreurs de signe pour l'étude des intégrales de Riemann, la continuité sur $]0, 1]$ est rarement rappelée.

De nombreuses compositions d'équivalents, d'erreurs dans l'ordre des développements limité.

En Q21 étourderie fréquente sur la dimension.

En III.B la présence d'un $(-1)^n$ ne suffit pas pour appliquer le critère spécial.

En Q38 seule une minorité de candidats semble avoir compris la différence entre convergence simple et uniforme et très peu majorent proprement $|1 - W(x)|$ par une constante.

Oubli fréquent des cas particuliers : cas $m = \mathrm{e}^{-1}$ pour lequel les deux solutions sont confondues, dérivation de $(X - a)^{k-1}$ pour $k = 1$, premiers termes de la somme pour le calcul de la loi de X...

Insistons enfin sur la question 32. La moitié de ceux qui traitent la question se trompe dans la résolution de $xy' = y$ sur un intervalle ne contenant pas 0. Les erreurs de signe se corrigeaient facilement si le candidat prenait le temps de vérifier que sa solution est bien solution, et obtenir un ensemble de solutions qui n'est pas une droite vectorielle est vraiment inquiétant. Quant au raccordement des solutions il n'est correctement traité que dans 10 % des copies.

Conclusion

Le jury invite les futurs candidats à mettre avant tout l'accent sur l'apprentissage du cours. Les exercices de base ne sont pas à négliger, mais ne doivent pas être confondus avec le cours : il est bon de savoir quand les intégrales de Bertrand convergent ou que $(1 + 1/n)^n$ ne converge pas vers 1, mais cela ne dispense pas de savoir le démontrer.

Nous les engageons à privilégier la qualité sur la quantité, dans la présentation et surtout dans la précision de l'argumentation.

Les candidats qui avancent dans un sujet de manière presque linéaire, en donnant tous les arguments importants, qui signale honnêtement les manques ou les incohérences de leurs propositions ont toujours d'excellentes notes.