CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

Mathématiques 1

TSI

2020

4 heures — Calculatrice autorisée

Traitement de signaux discrets

Le traitement des signaux est utilisé dans de nombreux domaines liés à l'analyse et à la synthèse de l'information. Un signal à temps discret, obtenu par exemple à partir de l'échantillonnage d'un signal à temps continu, est modélisé par une suite réelle $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dans ce modèle, le nombre réel x_n, également noté $[x]_n$, représente la valeur du signal au temps d'indice n.

Ce problème comprend deux parties. La partie I est indépendante de la partie II. Dans la partie II, la sous-partie II.D est indépendante des sous-parties qui la précèdent.

Notations

Dans tout le problème, $\mathcal{S}$ désigne l'espace vectoriel réel des suites réelles indexées par $\mathbb{N}$ et $I_{\mathcal{S}}$ désigne l'application identité de $\mathcal{S}$.

On désigne par

— τ l'opérateur de décalage, défini, pour tout $x \in \mathcal{S}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, par $[\tau(x)]_n = x_{n+1}$;

— Δ l'opérateur de différence, défini, pour tout $x \in \mathcal{S}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, par $[\Delta(x)]_n = x_{n+1} - x_n$;

— Σ l'opérateur de sommation, défini, pour tout $x \in \mathcal{S}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, par $[\Sigma(x)]_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x_k$.

On admet que les applications τ, Δ et Σ sont des endomorphismes de $\mathcal{S}$. On note $\mathcal{L}(\mathcal{S})$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathcal{S}$.

Pour tout $\Phi \in \mathcal{L}(\mathcal{S})$, la notation Φ^k désigne $I_{\mathcal{S}}$ si $k = 0$ et la composée $\underbrace{\Phi \circ \cdots \circ \Phi}_{k \text{ fois}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$.

I Discrétisation d'une équation différentielle

I.A – Opérateurs agissant sur les signaux à temps discret

Dans cette sous-partie, on étudie les opérateurs définis en introduction agissant sur les signaux à temps discrets.

Q 1. Dans le cas où $x_n = n^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $[\Delta(x)]_n$, $[\Delta^2(x)]_n$ et $[\Delta^3(x)]_n$.

Pour toutes suites $x \in \mathcal{S}$ et $y \in \mathcal{S}$, on rappelle que le produit de x et de y est défini par $[x \cdot y]_n = x_n y_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Q 2. Montrer que, pour toutes suites $(x, y) \in \mathcal{S}^2$, $\Delta(x \cdot y) = \Delta(x) \cdot y + \tau(x) \cdot \Delta(y)$.

Q 3. Démontrer, pour toute suite $x = (x_n)_n \in \mathcal{S}$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$, l'égalité $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} [\Delta(x)]_k = x_n - x_0$.

I.B – Discrétisation d'une équation différentielle

On présente ici les *équations aux différences finies* comme l'analogue discret des équations différentielles.

I.B.1) Étude d'une équation différentielle linéaire homogène

On considère l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad y'''(t) + 3y''(t) + 2y'(t) = 0. \tag{I.1}$$

On admet que l'ensemble des solutions de (I.1) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.

Q 4. Démontrer que y est solution de (I.1) si, et seulement si, y' est solution de l'équation suivante, d'inconnue z :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad z''(t) + 3z'(t) + 2z(t) = 0. \tag{I.2}$$

Q 5. Résoudre (I.2) et déterminer une base de l'espace vectoriel des solutions de (I.1).

I.B.2) Méthode de discrétisation de l'équation différentielle (I.1)

Soient A un nombre réel strictement positif.

L'objectif de cette section est de construire *une équation aux différences finies* (I.3) associée à (I.1) sur $[0, A]$.

Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 3. On subdivise le segment $[0, A]$ en N intervalles de même longueur $h = A/N$.

Soit y une solution de (I.1). Pour transposer à un signal u à temps discret la relation $y'''(t) + 3y''(t) + 2y'(t) = 0$, notamment valable pour $t = kh$, on décide de remplacer respectivement $y'(kh)$, $y''(kh)$ et $y'''(kh)$ par $\dfrac{[\Delta u]_k}{h}$, $\dfrac{[\Delta^2 u]_k}{h^2}$ et $\dfrac{[\Delta^3 u]_k}{h^3}$.

Le signal à temps discret u vérifie alors l'équation aux différences finies

$$\Delta^3(u) + 3h\Delta^2(u) + 2h^2\Delta(u) = 0. \tag{I.3}$$

Q 6. Montrer qu'une suite u est solution de (I.3) si, et seulement si, $\Delta(u)$ est solution de l'équation suivante, d'inconnue v :

$$\Delta^2(v) + 3h\Delta(v) + 2h^2 v = 0. \tag{I.4}$$

Q 7. Démontrer qu'une suite $v \in \mathcal{S}$ est solution de l'équation aux différences finies (I.4) si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+2} + (3h-2)v_{n+1} + (2h^2 - 3h + 1)v_n = 0$.

Q 8. Montrer qu'il existe quatre réels r_1, r_2, C_1 et C_2 tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = C_1 r_1^n + C_2 r_2^n$. On calculera les réels r_1 et r_2 en fonction de h.

Q 9. En déduire que les solutions de (I.3) vérifient

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = C_0 + C_1\left(\frac{1-(1-2h)^n}{2h}\right) + C_2\left(\frac{1-(1-h)^n}{h}\right)$$

où C_0 est une constante à déterminer en fonction de u_0. On pourra utiliser le résultat de la question **Q** 3.

I.B.3) Comparaison des solutions de (I.3) **à celles de** (I.1)

Q 10. Démontrer qu'il existe une unique solution y de (I.1) vérifiant $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$ et donner la valeur de cette solution.

On se propose de comparer y avec une solution u bien choisie de l'équation aux différences finies (I.3) associée à (I.1).

Q 11. On considère la solution u de l'équation aux différences finies (I.3) vérifiant les conditions initiales $u_0 = y(0)$, $[\Delta u]_0 = hy'(0)$ et $[\Delta^2 u]_0 = h^2 y''(0)$. Calculer u_1 et u_2 et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = (1-2h)^n - 3(1-h)^n + 3.$$

On note dorénavant $h_N = A/N$ afin de souligner la dépendance de h par rapport à N. De manière analogue, on note $u^{(N)}$ le signal à temps discret défini à la question **Q** 11. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n^{(N)} = (1-2h_N)^n - 3(1-h_N)^n + 3.$$

Soit $t \in [0, A]$, on note $\varphi_t(N) = \left\lfloor \dfrac{t}{h_N} \right\rfloor$, où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Q 12. Démontrer la double inégalité, $\varphi_t(N)h_N \leqslant t < (\varphi_t(N) + 1)h_N$.

Q 13. Démontrer que $\lim\limits_{N\to+\infty} (1-2h_N)^{\varphi_t(N)} = \mathrm{e}^{-2t}$ et que $\lim\limits_{N\to+\infty} (1-h_N)^{\varphi_t(N)} = \mathrm{e}^{-t}$.

Q 14. Justifier l'existence et déterminer la valeur de $\lim\limits_{N\to+\infty} u_{\varphi_t(N)}^{(N)}$. Comparer cette valeur au résultat de la question **Q** 10.

II Traitement d'un signal par filtre linéaire récursif

Dans la chaine de traitement numérique d'un signal à temps discret par filtre numérique récursif, on effectue une successions d'opérations qui transforment un *signal d'entrée* $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en un *signal de sortie* $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Un modèle mathématique de ce filtre est de la forme

$$\begin{cases} y_0 = x_0, \\ y_1 = x_1 - p_1 y_0, \\ y_2 = x_2 - p_2 y_1 - q_2 y_0, \\ y_{n+3} = x_{n+3} - p_{n+3}y_{n+2} - q_{n+3}y_{n+1} - r_{n+3}y_n, \quad \forall n \geqslant 0 \end{cases} \tag{II.1}$$

où $p = (p_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $q = (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $r = (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont trois suites réelles telles que $r_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

L'objet de cette partie est de présenter deux méthodes permettant de calculer le signal de sortie $y \in \mathcal{S}$ en fonction du signal d'entrée $x \in \mathcal{S}$.

II.A – Propriétés générales des filtres linéaires récursifs

Q 15. *Existence et unicité du signal de sortie.* Montrer que la donnée de la suite $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ détermine une unique suite $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ vérifiant (II.1).

On note alors $y = T(x)$ l'unique signal de sortie y associé au signal d'entrée $x \in \mathcal{S}$.

Q 16. Montrer que T est un endomorphisme injectif de $\mathcal{S}$.

On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des suites $y = (y_n) \in \mathcal{S}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$y_{n+3} + p_{n+3}y_{n+2} + q_{n+3}y_{n+1} + r_{n+3}y_n = 0.$$

Q 17. Montrer que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.

Q 18. Justifier que l'application $\psi : \left| \begin{array}{l} \mathcal{H} \to \mathbb{R}^3 \\ y \mapsto (y_0, y_1, y_2) \end{array} \right.$ est un isomorphisme et en déduire la dimension de $\mathcal{H}$.

II.B – Méthode algébrique de calcul du signal de sortie y pour un signal d'entrée $x \in \mathcal{S}$ donné

Dans toute cette sous-partie II.B, on suppose que l'on dispose d'une base (a, b, c) de $\mathcal{H}$.

Si une suite réelle $z = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$ est désignée par une lettre minuscule, on note $\mathbf{Z}$ avec une lettre majuscule grasse, la suite vectorielle définie en posant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{Z}_n = \begin{pmatrix} z_n \\ z_{n+1} \\ z_{n+2} \end{pmatrix}$.

Q 19. Déterminer une suite de matrices $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telle que l'on ait l'équivalence

$$\Big(\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_{n+3} + p_{n+3}y_{n+2} + q_{n+3}y_{n+1} + r_{n+3}y_n = x_{n+3}\Big) \Leftrightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{Y}_{n+1} = M_n\mathbf{Y}_n + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_{n+3} \end{pmatrix}\right)$$

Q 20. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la matrice M_n est inversible.

Q 21. Justifier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les égalités, $\mathbf{A}_{n+1} = M_n\mathbf{A}_n$, $\mathbf{B}_{n+1} = M_n\mathbf{B}_n$ et $\mathbf{C}_{n+1} = M_n\mathbf{C}_n$ où $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ et $\mathbf{C}$ sont les suites vectorielles respectivement associées aux suites réelles a, b et c.

Q 22. Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(\mathbf{A}_n, \mathbf{B}_n, \mathbf{C}_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Soit $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant (II.1).

Q 23. Montrer qu'il existe trois suites réelles u, v et w telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{Y}_n = u_n\mathbf{A}_n + v_n\mathbf{B}_n + w_n\mathbf{C}_n.$$

Q 24. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$[\Delta(u)]_n\mathbf{A}_{n+1} + [\Delta(v)]_n\mathbf{B}_{n+1} + [\Delta(w)]_n\mathbf{C}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_{n+3} \end{pmatrix}.$$

On note $W_n \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice dont les colonnes sont $\mathbf{A}_n$, $\mathbf{B}_n$ et $\mathbf{C}_n$.

Q 25. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les termes $[\Delta(u)]_n$, $[\Delta(v)]_n$ et $[\Delta(w)]_n$ à l'aide de la matrice W_{n+1} et de x_{n+3}.

Q 26. Déduire des questions qui précèdent une méthode pour calculer $y = T(x)$ défini par le système (II.1).

II.C – Exemple de mise en œuvre de cette méthode algébrique pour un signal d'entrée de type rampe

Q 27. Montrer, pour tout $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$, l'égalité $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kq^k = \frac{q(nq^{n+1} - (n+1)q^n + 1)}{(q-1)^2}$.

Q 28. Montrer que les suites $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{S}$ définies, pour tout entier naturel n, par $a_n = 1$, $b_n = (-3)^n$ et $c_n = 2^n$ forment une base de l'ensemble $\mathcal{H}$ des suites $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $y_{n+3} - 7y_{n+1} + 6y_n = 0$.

Q 29. Résoudre, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le système suivant, d'inconnues α, β, γ :

$$\begin{pmatrix} 1 & (-3)^{n+1} & 2^{n+1} \\ 1 & (-3)^{n+2} & 2^{n+2} \\ 1 & (-3)^{n+3} & 2^{n+3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ n+3 \end{pmatrix}.$$

Q 30. En déduire le signal de sortie y vérifiant

$$\begin{cases} y_0 = 0, \\ y_1 = 1, \\ y_2 = 2, \\ y_{n+3} - 7y_{n+1} + 6y_n = n + 3, \quad \forall n \geqslant 0. \end{cases}$$

II.D – Méthode analytique de calcul d'un signal de sortie

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{S}$, une suite modélisant un signal discret.

On note ρ_u le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n z^n$. Si $\rho_u > 0$, on dit que u admet une *transformée en Z*, notée U, définie sur le domaine $\mathcal{D}_u = \{z \in \mathbb{C}^\star; |z| > \dfrac{1}{\rho_u}\}$ par

$$\forall z \in \mathcal{D}_u, \qquad U(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^{-n}.$$

On admet que, si u et v sont deux suites telles que les séries entières $\sum u_n z^n$ et $\sum v_n z^n$ ont le même rayon de convergence strictement positif, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, la suite $\lambda u + v$ admet une transformée en Z égale à $\lambda U + V$ où U et V sont respectivement les transformées en Z des suites u et v.

Q 31. Montrer que si les transformées en Z, U et V, de deux suites $u \in \mathcal{S}$ et $v \in \mathcal{S}$ sont égales, alors les deux suites u et v sont elles-mêmes égales.

Q 32. Montrer que $\rho_{\tau(u)} = \rho_u$.

Q 33. Calculer ρ_u et la transformée en Z de u dans le cas où $u_n = (-2)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II.E – Exemple de mise en œuvre de la méthode analytique pour un signal d'entrée exponentiel

On se propose de déterminer le signal de sortie $y \in \mathcal{S}$ vérifiant

$$\begin{cases} y_0 = 0, \\ y_1 = -1, \\ y_2 = -1, \\ y_{n+3} + y_{n+2} - y_{n+1} - y_n = (-2)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Dans les deux questions qui suivent, on suppose que $\rho_y > 0$ et on note Y la transformée en Z de y.

Q 34. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la suite $\tau^k(y)$ admet une transformée en Z, notée Y_{τ^k} et définie par

$$\forall z \in \mathcal{D}_y, \qquad Y_{\tau^k}(z) = z^k Y(z) - \sum_{i=0}^{k-1} y_i z^{k-i}.$$

Q 35. Déterminer $\tau^3(y) + \tau^2(y) - \tau(y) - y$ et en déduire que

$$Y(z) = \frac{-z(z+3)}{(z-1)(z+1)(z+2)}.$$

Q 36. Déterminer trois nombres réels α, β et γ tels que,

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{-2, -1, 1\}, \qquad \frac{-z\ (z+3)}{(z-1)(z+1)(z+2)} = \frac{\alpha}{z+1} + \frac{\beta}{z+2} + \frac{\gamma}{z-1}.$$

Q 37. Si $c \in \mathbb{R}^\star$, calculer le développement en série entière en 0 de $z \mapsto \dfrac{1}{1-cz}$ et donner son rayon de convergence.

Q 38. En déduire que $\dfrac{1}{z+c} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-c)^n z^{-n-1}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > |c|$.

Q 39. Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > 2$, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left((-1)^n - \frac{(-2)^n}{3} - \frac{2}{3}\right) z^{-(n+1)}$ converge.

Q 40. En utilisant les questions **Q** 35 à **Q** 38, déterminer l'expression générale de y_n en fonction de n.

• • • FIN • • •