Mathématiques 1

Présentation du sujet

Cette épreuve présente différentes méthodes de traitement des signaux utilisé dans l'analyse de l'information. Par échantillonnage d'un signal continu on obtient un signal à temps discret qui est modélisé par une suite de nombre réels. Dans le sujet interviennent une équation différentielle discrétisée en une suite récurrente, un opérateur linéaire et pour finir des développements en séries.

Ce problème fait appel à des notions d'analyse et d'algèbre linéaire conformes au programme des deux années de la filière TSI.

La première partie commence par des propriétés de l'opérateur différence agissant sur les suites, se poursuit par une discrétisation d'une équation différentielle par une équation aux différences finies et se termine par une comparaison de la solution de cette équation à celle d'un problème de Cauchy.

Dans la deuxième partie, on modélise un filtre à l'aide d'un opérateur linéaire. L'étude de ses propriétés permet de construire une méthode matricielle de calcul du signal de sortie. Un exemple est traité par résolution d'un système linéaire.

Le sujet se termine par une méthode analytique de calcul d'un signal de sortie par transformation d'une série entière. Une application de cette méthode pour un signal d'entrée exponentiel est mise en œuvre grâce à des développements en séries entières usuels.

Analyse globale des résultats

Le sujet utilise peu le programme de deuxième année et les notions de première année utilisées sont classiques. Ces outils sont maitrisés dans les très bonnes copies qui sont en nombre conséquent.

La longueur de l'épreuve a permis aux candidats de traiter un grand nombre de questions. Cependant, beaucoup s'imaginent qu'il est possible de répondre en recopiant simplement l'énoncé. Relier l'hypothèse et le résultat par un simple « donc », ne suffit pas. D'autres candidats effectuent un calcul en laissant le correcteur deviner leur intention.

Le manque de rigueur et de justifications apparaissant dans trop de copies est un écueil important pour obtenir des points y compris dans les questions faciles.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Remarques générales

Le jury a rencontré trop souvent des copies incompréhensibles, peu soignées ou voulant faire illusion. Il est vivement déconseillé d'utiliser les locutions « évident », « trivial », « il est clair que ». Aucun commentaire relatif à la facilité des questions n'est requis. Ces locutions masquent souvent la difficulté à donner l'argument mathématique attendu. De plus, quand un candidat prétend relever une erreur d'énoncé, c'est le plus souvent qu'un point lui a échappé. Enfin, le sujet ne comportait pas de notion hors programme. Ceux qui ont pensé en relever devraient d'abord maitriser les notions élémentaires qui leur permettaient de réussir l'épreuve. Une réponse présentant une démarche scientifique honnête est valorisée même si elle n'aboutit pas.

Les questions Q10, Q11, Q28, Q29, Q36 pouvaient faire appel à la résolution d'un système linéaire de trois équations à trois inconnues. Il est étonnant de constater que la résolution de tels systèmes, alors que la calculatrice est autorisée, pose souvent problème. De manière analogue, la résolution d'équations du second degré donne souvent lieu à des erreurs de calcul.

Un grand nombre de questions étaient fermées : Q7, Q9, Q11, Q13, Q27, Q34, Q35, Q38. Elles fournissaient le résultat attendu de manière à permettre aux candidats de progresser plus facilement dans le sujet. Dans ce cas, il est demandé aux candidats un calcul et un raisonnement honnêtes. Si une question n'est pas résolue, il faut s'y référer précisément.

Être vigilant dans la validité des expressions mathématiques et dans les étapes d'une démonstration permet souvent d'avoir la totalité des points. Notamment, les inégalités strictes ($<$) et larges ($\leqslant$) sont parfois confondues. Il faut aussi être prudent quand on multiplie une inégalité par un nombre.

Remarques sur certaines questions

Q1. Cette question a été plutôt mal réussie. Consacrer du temps à comprendre l'opérateur Δ ainsi que sa composée Δ^2 permettait plus d'efficacité dans la suite.

Q4, **Q5**. Très peu de copies mentionnent le caractère dérivable des fonctions en cause pour montrer l'équivalence demandée. Beaucoup de candidats ne traitent que la première moitié de Q5. Trop de candidats donnent une famille engendrant l'espace des solutions de l'équation différentielle sans démontrer qu'elle est libre.

Q8, **Q9**. Dans certaines copies, équations différentielles et suites récurrentes linéaires sont confondues. Il est attendu une référence explicite aux résultats du cours suivant le signe du discriminant de l'équation caractéristique : l'hypothèse $h > 0$ doit être mentionnée et justifiée. En Q9, trop de candidats ignorent l'indication de l'énoncé et s'engagent dans une voie sans issue. Le calcul de la somme des termes d'une suite géométrique doit distinguer les cas selon que la raison est égale ou différente de 1.

Q10. L'énoncé invite d'abord à discuter l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy avant d'effectuer son calcul. On peut bien sûr justifier l'existence et l'unicité par le calcul : mais il faut alors être complètement explicite en partant du constat que le système linéaire qu'on a résolu admet une unique solution. La référence au théorème de Cauchy linéaire est attendu.

Q11. Ne pas confondre hypothèse et conclusion. Le mot-clef « en déduire » indique qu'il faut dans un premier temps calculer u_1 et u_2 et seulement dans un second temps calculer l'expression du terme général u_n. Prendre la conclusion $u_n = (1-2h)^n - 3(1-h)^n + 3$ comme hypothèse pour calculer u_1 et u_2 est inacceptable.

Q12, **Q13**. La définition de la partie entière est parfois imprécise. Le calcul de limite est classique, mais compliqué par les notations et la partie entière en exposant. Peu de candidats l'ont mené à bien.

Q16. La propriété d'injectivité est trop souvent confondue avec le caractère bien défini de l'opérateur T demandé à la question Q15.

Q17, **Q18**. On note une très grande confusion entre les objets comme par exemple montrer que l'application $\mathscr{H}$ est linéaire, alors que cette notation désigne un espace vectoriel. Les notions de linéarité d'une application et de stabilité d'une partie par combinaison linéaire sont confondues. Pour ces deux questions proches du cours, les candidats qui ont procédé avec méthode ont souvent réussi. En revanche, citer le cours de manière abstraite sans l'appliquer explicitement à la situation en cause n'est pas satisfaisant.

Q22. La plupart des candidats tentent un raisonnement incorrect. Il suffit de procéder par récurrence en l'initialisant à l'aide de l'isomorphisme ψ puis en invoquant l'inversibilité des matrices M_n.

Q25. Beaucoup d'expressions fantaisistes sont proposées, certaines ne respectant pas la taille des matrices en cause pour que le produit ait un sens. Dans cette question ainsi qu'en Q19 et Q21, on note une difficulté à appliquer le produit matriciel.

Q27. Cette question est souvent bien traitée. Une dérivation plutôt qu'une récurrence permet de gagner du temps.

Q28. Il faut penser à montrer que les suites a, b et c sont bien dans $\mathcal{H}$, qu'elles forment une famille libre, et invoquer l'égalité entre le cardinal de cette famille et $\dim(\mathcal{H})$. La plupart des candidats oublient de traiter l'un de ces points.

Q31. Cette question est difficile car la fonction U n'est pas la somme d'une série entière. Il faut se ramener à des sommes de série entière pour conclure à l'aide d'un argument d'unicité. On note que les candidats utilisent très peu les quantificateurs, ce qui est pourtant ici indispensable.

Q32. La règle de d'Alembert trop souvent citée ne permet pas d'aboutir. On conclut à l'aide de la définition du rayon de convergence ou du lemme d'Abel.

Q33. Beaucoup de candidats, troublés par la définition de U, calculent $1/\rho_u$ au lieu de ρ_u.

Q34. Cette question est bien traitée dans quelques copies, l'opérateur τ étant bien manipulé.

Q35. On note très peu de réponses pour cette question de synthèse.

Q36. Le travail d'identification est effectué de manière inégale. La méthode par multiplication d'un facteur puis par évaluation est appréciée.

Q37, **Q38**. Les candidats à l'aise avec les séries géométriques réussissent bien ces questions. On attend de la rigueur dans le domaine de définition des variables.

Q39. Il s'agit d'appliquer le résultat de Q38. L'utilisation directe de la règle de d'Alembert est inappropriée. Pour prouver la convergence d'une série, celle-ci est trop souvent invoquée et trop malmenée alors qu'il faudrait se limiter aux seuls cas où elle est véritablement efficace.

Q40. Par cette question, les très bons candidats ont conclu avec brio cette épreuve.

Conclusion

Le jury a corrigé de très bonnes copies dans lesquelles les candidats ont répondu progressivement aux questions avec soin, rigueur et justification. Cependant, un grand nombre de candidats ont abordé beaucoup de questions, au risque d'en bâcler certaines. Ils devraient se concentrer sur les plus faciles ou les plus classiques en les traitant rigoureusement pour parvenir au résultat attendu.

Apprendre et comprendre le cours reste essentiel pour pouvoir le restituer avec précision lors d'une épreuve de concours. On doit aussi retenir des règles et des méthodes mais il faut comprendre et savoir quand les utiliser. La recherche de nombreux exercices sur toutes les parties du programme des deux années de classe préparatoire reste incontournable.