Mathématiques 1

TSI **2021**

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures — Calculatrice autorisée

Ce sujet comporte deux problèmes indépendants. Le premier problème est consacré au calcul de la valeur d'une série et à son utilisation pour modéliser une expérience aléatoire. Le second problème est consacré à l'utilisation des séries de Fourier pour résoudre, dans un cas particulier, l'équation de propagation de la chaleur dans un solide conducteur à une seule dimension. Cette équation a été étudiée par Joseph Fourier en 1802.

I Séries et probabilités

Notations et rappels

Si $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, on note $\binom{n}{k}$ le coefficient binomial k parmi n. On rappelle que, si $0 \leqslant k \leqslant n$, $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ et, si $k > n$, $\binom{n}{k} = 0$.

Objectifs

Dans la sous-partie I.A, on montre que, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{n \geqslant k} \binom{n}{k} x^n$ converge et que

$$\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

Dans la sous-partie I.B, on utilise ce résultat pour étudier une expérience aléatoire.

I.A – Calcul de la somme d'une série

Dans les questions 1 et 2, k un entier naturel fixé.

Q 1. Montrer que : $\binom{n+1}{k} \sim \binom{n}{k}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Q 2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n \geqslant k} \binom{n}{k} x^n$.

Lorsqu'elle est définie, on note $S_k(x)$ la valeur de la somme $\sum\limits_{n \geqslant k} \binom{n}{k} x^n$.

Q 3. Rappeler sans démonstration le domaine de définition de la fonction S_0 et, pour tout réel x dans ce domaine, la valeur de $S_0(x)$.

Q 4. À l'aide d'un théorème de cours énoncé avec précision, justifier que, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$,

$$S_1(x) = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Q 5. Montrer que, pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$ tel que $k < n$, on a $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.

Q 6. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \left]-1,1\right[$, $S_{k+1}(x) = xS_k(x) + xS_{k+1}(x)$.

Q 7. Démontrer par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \left]-1,1\right[$, $S_k(x) = \dfrac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$.

I.B – Étude d'une expérience aléatoire

On considère un dé équilibré comportant 1 face blanche et 5 faces noires. On réalise l'expérience aléatoire suivante.

1. On lance le dé jusqu'à obtenir la face blanche. On note N la variable aléatoire égale au nombre de lancers nécessaires pour obtenir la face blanche.
2. Si N prend une valeur entière positive non nulle n lors de la première étape, on réalise alors une série de n lancers du dé. On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où la face blanche a été obtenue lors de cette seconde série de lancers.

Q 8. Reconnaitre la loi de la variable aléatoire N.

Q 9. Calculer, en explicitant les calculs, l'espérance et la variance de N.

Q 10. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, donner une expression de $P(N \leqslant n)$ en fonction de n qui ne fasse pas intervenir le symbole Σ.

Q 11. Soit $k \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En distinguant les cas $k \leqslant n$ et $k > n$, déterminer la probabilité conditionnelle $P_{(N=n)}(X = k)$.

Q 12. Démontrer que $P(X = 0) = 5/11$, puis que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X = k) = \frac{36}{55}\left(\frac{5}{11}\right)^k.$$

Q 13. Vérifier que $\displaystyle\sum_{k \in X(\Omega)} P(X = k) = 1$.

Q 14. Montrer que X admet une espérance et calculer $E(X)$.

Q 15. Calculer $E(X(X-1))$.

Q 16. En déduire que X admet une variance et calculer $V(X)$.

II Séries de Fourier et équation de la chaleur

Rappels

Si F est une fonction continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2, alors :

i) les coefficients de Fourier trigonométriques de F, $\left(a_n(F)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(b_n(F)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont définis par

$$\begin{cases} a_0(F) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} F(t)\,\mathrm{d}t, \\ a_n(F) = \displaystyle\int_{-1}^{1} F(t)\cos(n\pi t)\,\mathrm{d}t \quad \text{ et } \quad b_n(F) = \displaystyle\int_{-1}^{1} F(t)\sin(n\pi t)\,\mathrm{d}t, \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \,; \end{cases}$$

ii) la série $\sum \left(\left(a_n(F)\right)^2 + \left(b_n(F)\right)^2\right)$ converge ;

iii) si F est continue et C^1 par morceau sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de F converge en tout nombre réel x et sa somme vaut $F(x)$.

II.A – Propriétés des coefficients de Fourier

Dans tout cette sous-partie, F est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, périodique de période 2. Sa dérivée est notée F'.

Q 17. Démontrer que :

— si la fonction F est paire, alors, pour tout entier naturel n non nul, $b_n(F) = 0$;

— si la fonction F est impaire, alors, pour tout entier naturel n, $a_n(F) = 0$.

Q 18. Démontrer que :

— si la fonction F est paire, alors sa dérivée F' est impaire ;

— si la fonction F est impaire, alors sa dérivée F' est paire.

Q 19. Démontrer que

$$\begin{cases} a_0(F') = 0, \\ a_n(F') = n\pi b_n(F) \quad \text{et} \quad b_n(F') = -n\pi a_n(F), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Pour les deux dernières égalités, on pourra effectuer une intégration par parties.

Q 20. En déduire que les deux séries $\sum n^2\big(a_n(F)\big)^2$ et $\sum n^2\big(b_n(F)\big)^2$ sont convergentes.

Dans la suite de cette sous-partie, on suppose que la fonction F est périodique de période 2, impaire et de classe C^3 sur $\mathbb{R}$. On note $F^{(3)}$ sa dérivée troisième.

Q 21. Exprimer les coefficients de Fourier trigonométriques de $F^{(3)}$ en fonction de ceux de F.

Q 22. En déduire la nature de la série $\sum n^6\big(b_n(F)\big)^2$.

Q 23. Pour deux réels quelconques a et b, démontrer que $|a|\,|b| \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$.

Q 24. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n^2|b_n(F)| \leqslant \frac{1}{2}\left(n^6\big(b_n(F)\big)^2 + \frac{1}{n^2}\right)$.

Q 25. Quelle est la nature de la série $\sum n^2 b_n(F)$?

II.B – Un problème de prolongement

On suppose dans cette sous-partie que f est une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$ vérifiant $f(0) = f(1) = 0$.

Q 26. Démontrer qu'il existe une unique fonction F, impaire, périodique de période 2, telle que

$$\forall x \in [0,1], \qquad F(x) = f(x).$$

Q 27. Décrire l'enchainement des transformations géométriques qui permettent d'obtenir la courbe représentative de F à partir de celle de f.

Q 28. À l'aide d'arguments géométriques, justifier que la courbe représentative de la fonction F admet des tangentes aux points d'abscisses 0, 1 et -1. Déterminer les coefficients directeurs de ces trois tangentes.

On admet pour la suite du problème que, si la fonction f est de classe C^3 sur $[0,1]$ et vérifie

$$f(0) = f(1) = f''(0) = f''(1) = 0,$$

où f'' désigne la dérivée seconde de f, alors la fonction F est de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.

II.C – L'équation de la chaleur

On considère une barre rectiligne métallique de longueur 1 m. On suppose qu'au cours du temps la température de chacune de ses extrémités est maintenue à 0 °C. On prend pour origine l'une des extrémités de la barre et on repère chaque point de la barre par son abscisse x (en mètre). On note $f(x)$ la température (en degrés Celsius) à l'instant $t = 0$ au point de la barre d'abscisse x. On suppose que la fonction f est de classe C^3 sur $[0,1]$.

On note $\Delta = [0, +\infty[\times [0,1]$. Pour $(t,x) \in \Delta$, on note $u(t,x)$ la température, à l'instant t, au point de la barre d'abscisse x. On admet que la fonction u vérifie l'équation de la chaleur

$$\forall (t,x) \in \Delta, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(t,x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x). \tag{II.1}$$

Les conditions spécifiées dans l'énoncé imposent en plus les égalités suivantes :

$$\begin{cases} u(t,0) = u(t,1) = 0 & \forall t \in [0,+\infty[, \\ u(0,x) = f(x) & \forall x \in [0,1]. \end{cases}$$

On cherche à déterminer les fonctions u solutions de l'équation (II.1) vérifiant de plus les conditions de régularité suivantes :

$$\forall t \in [0,+\infty[, \qquad \text{la fonction } g_t : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & u(t,x) \end{array} \right. \text{ est de classe } C^3 \text{ sur } [0,1];$$

$$\forall x \in [0,1], \qquad \text{la fonction } h_x : \left| \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & u(t,x) \end{array} \right. \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [0,+\infty[.$$

Q 29. Démontrer que

$$\forall t \in [0,+\infty[, \qquad \frac{\partial u}{\partial t}(t,0) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,1) = 0.$$

Q 30. Que peut-on en déduire pour les valeurs de $f''(0)$ et de $f''(1)$?

Q 31. Justifier que f est prolongeable en une unique fonction F impaire, périodique de période 2 et de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.

On suppose que u est une solution du problème et on fixe $t \in [0,+\infty[$.

Q 32. Démontrer que la fonction g_t est prolongeable en une unique fonction G_t impaire, périodique de période 2 et de classe C^3 sur $\mathbb{R}$.

Q 33. Démontrer qu'il existe une suite $\left(\beta_n(t)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad G_t(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n(t) \sin(n\pi x).$$

Q 34. Exprimer $\beta_n(0)$ à l'aide de la fonction F.

Q 35. Justifier que la dérivée seconde de G_t, notée G_t'', est égale à la somme de sa série de Fourier et écrire cette somme.

Pour $(t,x) \in [0,+\infty[\times \mathbb{R}$, on note $U(t,x) = G_t(x)$. On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction β_n est de classe C^1 sur $[0,+\infty[$, que la série $\sum |\beta_n'(t)|$ converge et que

$$\forall (t,x) \in [0,+\infty[\times \mathbb{R}, \qquad \frac{\partial U}{\partial t}(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n'(t) \sin(n\pi x).$$

Q 36. En déduire que,

$$\forall (t,x) \in \Delta, \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n'(t) \sin(n\pi x) = -\pi^2 \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 \beta_n(t) \sin(n\pi x).$$

On admet que cette égalité entraine, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0,+\infty[$, l'égalité

$$\beta_n'(t) = -n^2\pi^2\beta_n(t).$$

Q 37. Donner l'ensemble des solutions, sur $[0,+\infty[$, de l'équation différentielle $y'(t) + n^2\pi^2 y(t) = 0$.

Q 38. En déduire que la solution cherchée est définie par

$$\forall (t,x) \in \Delta, \qquad u(t,x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n(F) \mathrm{e}^{-n^2\pi^2 t} \sin(n\pi x).$$

Remarque. Il est possible, mais non demandé ici, de démontrer que cette fonction vérifie bien toutes les conditions imposées.

• • • FIN • • •