Mathématiques 1

Présentation du sujet

Cette épreuve comporte deux problèmes indépendants. Dans le premier, le calcul de la somme d'une série permet de modéliser une expérience aléatoire. Dans le deuxième, l'analyse de Fourier est utilisée pour résoudre sous certaines hypothèses l'équation de la chaleur se propageant le long d'une barre métallique rectiligne.

Ce problème fait appel à des notions de probabilité et d'analyse conformes au programme des deux années de la filière TSI.

Le premier problème commence par le calcul des dérivées successives de la somme géométrique. Leur valeur permet de déterminer la loi, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire qui modélise un jeu de dé.

Le deuxième problème commence par la démonstration des propriétés des coefficients de Fourier. Il se poursuit par la construction d'un prolongement 2-périodique d'une fonction C^1 sur $[0,1]$ nulle aux extrémités à l'aide d'arguments géométriques. Le sujet se termine par la recherche d'une solution de l'équation de la chaleur à une dimension à l'aide d'un développement de Fourier.

Analyse globale des résultats

Le sujet est parfaitement calibré pour cette filière. Équilibré et progressif, il permet de valoriser à la fois les capacités à justifier une propriété et les compétences calculatoires.

Le découpage du sujet en deux parties indépendantes a permis aux candidats en difficulté sur le premier problème de rebondir efficacement sur le second.

Le niveau général est faible face à un sujet ne présentant pas de difficultés majeures et faisant appel à de nombreuses méthodes très classiques. Un grand nombre de candidats ont abordé beaucoup de questions même celles plus théoriques en deuxième partie. Mais trop d'erreurs inattendues sont commises. À cela s'ajoutent un manque de rigueur et de justifications.

Commentaires sur les réponses apportées et conseils aux futurs candidats

Remarques générales

Le jury a relevé trois erreurs qui apparaissent dans un grand nombre de copies.

- Au moins 30 % des candidats écrivent qu'une fonction est soit paire soit impaire.
- Au moins 40 % des candidats pensent que les séries numériques $\sum u_n$ et $\sum n^2 u_n$ sont de même nature. Le cours sur le rayon de convergence des séries entières, mal assimilé, introduit une confusion.
- Une fonction nulle en un point n'entraine pas que sa dérivée soit nulle en ce point. L'erreur consistant à écrire « $f(0) = 0$ donc $f'(0) = 0$ » est très répandue (environ 40 % des copies). Les coefficients directeurs des tangentes en des points où f s'annule sont très souvent annoncées comme étant égaux à zéro. Dans les deux dernières parties du deuxième problème, beaucoup de candidats ont confondu les notations proposées avec la notation usuelle $F' = f$. Ainsi l'hypothèse $f(0) = 0$ devient $F'(0) = 0$.

Beaucoup de candidats lisent l'énoncé sans l'analyser et le comprendre. En **Q19** par exemple, ils s'emparent de l'indication « intégration par parties », comme d'une technique pour résoudre **Q17** alors que dans cette question l'hypothèse de dérivabilité de F n'est pas nécessaire.

À plusieurs reprises, l'énoncé annonce un objectif ou admet un résultat. Plusieurs candidats éprouvent une grande difficulté à distinguer les différents statuts des assertions du sujet.

Par exemple, la formule $\sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$ est indiquée comme un objectif de la sous-partie I.A et ne doit pas être admise avant la fin de **Q7**. Le paragraphe entre **Q28** et la sous-partie II.C énonce un résultat admis qui repose sur l'hypothèse $f(0) = f(1) = f''(0) = f''(1) = 0$. Ces égalités ne doivent pas être supposées vraies dans la suite mais bien vérifiées à chaque fois que ce résultat doit être appliqué.

La partie probabilité porte sur une expérience aléatoire construite en deux étapes. La formule des probabilités totales est attendue. Elle n'est citée et appliquée que dans de très rares copies.

Pour chaque question, il est possible de proposer un début de réponse à défaut de pouvoir répondre complètement. Cependant ces tentatives doivent toujours faire sens dans le cadre de ce qui est attendu. Par exemple, les questions de synthèse **Q36** ou **Q38** nécessitent d'avoir parfaitement compris les notations et la démarche proposées dans l'énoncé. Trop de candidats ne se sont pas approprié les questions qui y conduisent et proposent des réponses peu rigoureuses.

Quelques candidats répondent à certaines questions en recopiant simplement l'énoncé ou par une simple phrase affirmative sans justification. Tous doivent être conscients que dans chaque réponse on attend un argument mathématique qu'il s'agisse d'une hypothèse de l'énoncé, d'un point de cours ou d'un résultat montré dans une question précédente.

Enfin le jury insiste sur la nécessité d'une numérotation rigoureuse des pages et des questions qui permette au correcteur de se repérer dans la copie.

Remarques par questions

Q1. Les nombreux candidats qui ont déterminé la limite du quotient, ont réussi cette question. D'autres candidats partant de l'équivalent $n + 1 \sim n$ ont enchainé les erreurs.

Q2. On rappelle que la règle de d'Alembert pour les séries entières est hors programme. Les candidats qui l'ont appliqué ont eu moins de points que ceux qui ont justifié cette règle pour les séries numériques.

Q4. L'énoncé d'un théorème du cours est demandé, ce qui n'a été fait que dans un nombre très faible de copies.

Q5. On demande de démontrer la formule de Pascal. L'indiquer comme un élément du cours ou invoquer le triangle de Pascal ne suffisait pas.

Q6. La maitrise de la manipulation des indices de sommation jouait un rôle déterminant dans cette question.

Q7. Cette question est l'objectif de la première sous-partie et permet de prouver une formule utile pour la partie probabilité du problème. Les candidats ne doivent pas l'utiliser pour répondre aux questions antérieures.

En ce qui concerne la récurrence, dans la mesure où l'énoncé demande de montrer une égalité pour tout $k \in \mathbb{N}$, il fallait initialiser au rang $k = 0$. Environ 20 % des candidats ont utilisé la propriété demandée lors de la phase d'hérédité.

Q8, **Q9**. 50 % des candidats reconnaissent une loi géométrique mais seul un tiers d'entre eux justifie cette loi. La plupart des candidats ont traité ces questions. Cependant 20 % d'entre eux citent les formules du cours alors que le sujet demandait de les recalculer. Le lien avec les fonctions S_1 et S_2 n'a quasiment jamais été fait. Au mieux, le théorème de dérivation terme à terme est appliqué. L'appropriation de la formule énoncée clairement en préambule du problème n'a pas été effective.

Q12. Question peu abordée. La formule des probabilités totales est invoquée seulement dans les meilleures copies.

Q13. Certains candidats ont judicieusement justifié cette égalité par un argument théorique même si un calcul était attendu. Environ un quart des candidats oublie le terme d'indice 0.

Q14. Trop peu de candidats justifient correctement l'existence de l'espérance en invoquant une convergence absolue de la série en cause.

Q15, **Q16**. Les candidats qui ont abordé ces questions (50 % environ) connaissent la formule de transfert. L'existence de $E(X(X-1))$, bien que non explicitement demandée, était attendue et permettait de conclure à l'existence de la variance de X.

Q17, **Q18**. Comme la question **Q19** suggère une intégration par parties, beaucoup de candidats jugent utile de l'utiliser dès **Q17** ou **Q18** alors qu'il ne s'agit pas d'une technique qui permet d'aboutir. En **Q17**, beaucoup de candidats raisonnent à l'aide d'arguments géométriques. Ceci a été accepté quand tous sont justifiés. Pour ceux qui ont tenté un changement de variable, trop peu l'ont mené à bien.

Q19. Dans la mesure où l'énoncé donne le résultat, il faut expliquer les étapes pour y parvenir, notamment justifier la nullité du crochet. Un nombre important de candidats font une distinction de cas selon la parité de F en oubliant qu'une fonction n'est pas forcément paire ou impaire.

Q20. Beaucoup de candidats confondent le résultat demandé avec celui relatif aux séries entières selon lequel $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence, ce qui est sans rapport avec la question.

Seules les très bonnes copies énoncent et justifient la continuité de F' pour appliquer le rappel ii).

Q23. Pour cette inégalité classique, l'obtention des valeurs absolues a causé des difficultés à de nombreux candidats.

Q25. Il est demandé dans ce type de questions d'être très précis sur les raisonnements et résultats de cours utilisés. Le résultat de comparaison des séries à termes positifs est trop peu invoqué. Il en va de même pour celui sur la nature d'une série dont le terme général est une combinaison linéaire de termes généraux de séries convergentes.

Q26, **Q27**, **Q28**. Ces questions ont très peu été abordées alors qu'un raisonnement basé sur un dessin permettait de conclure. Les candidats qui répondent sans se référer à des transformations géométriques ne peuvent espérer aboutir. Par exemple, la phrase « on répète le motif » n'est pas suffisante.

Un grand nombre de candidats s'imaginent à tort que les égalités $f(0) = f(1) = 0$ entrainent que les tangentes en 0 et 1 sont horizontales, ce qui pose question quant à la maitrise des notions de base du calcul différentiel.

Q29. Un raisonnement appuyé sur le contexte physique proposé pouvait convenir : la température aux extrémités de la barre, étant maintenue constante, ne varie pas, donc les dérivées temporelles aux extrémités s'annulent. Quelques candidats ont proposé ce raisonnement. D'autres, là encore imaginent que la dérivée d'une fonction nulle en un point est nécessairement nulle. Il s'agit au moins d'une lacune majeure dans l'apprentissage du cours d'analyse. Beaucoup de candidats gèrent très mal les deux variables de la fonction température.

Q32. Il s'agissait d'utiliser le résultat admis après **Q28**. Trop peu de candidats comprennent que les égalités $g_t''(0) = g_t''(1) = 0$ sont nécessaires à l'obtention de la classe C^3 du prolongement.

Q33. Cette question sans difficulté nécessite l'application du théorème de Dirichlet rappelé dans le sujet. Parmi les candidats qui ont traité cette question, les hypothèses ne sont pas souvent vérifiées.

Q35. Un grand nombre de candidats pensent qu'on peut dériver terme à terme un développement en série de Fourier sans hypothèse particulière.

Q37. 90 % des candidats ont bien répondu à cette question. Cependant quelques-uns se lancent dans la recherche d'une solution particulière après avoir résolu l'équation homogène.

Conclusion

La connaissance du cours et la maitrise de méthodes de raisonnement et de calcul au programme permettent de rendre une très bonne copie. À cet égard, le sujet valorise fortement les candidats qui ont fait un effort d'apprentissage et d'assimilation du cours et des exercices-types.

Malgré un nombre croissant de très bonnes copies, le jury constate, comme chaque année, une certaine carence dans l'acquisition des connaissances de base du cours de mathématiques. Certaines notions fondamentales comme la dérivabilité ou la théorie des séries sont mal assimilées. La partie probabilité du programme est dans l'ensemble mal maitrisée. Les lois usuelles doivent être parfaitement connues.

Nous conseillons de ne pas faire d'impasse sur le programme. Un travail régulier est nécessaire. Rappelons qu'apprendre et comprendre le cours reste essentiel. Il faut savoir aussi l'appliquer en s'entrainant à résoudre des exercices de difficulté progressive.