Mathématiques 2

TSI

2024

CONCOURS CENTRALE•SUPÉLEC

4 heures Calculatrice autorisée

Fonctions génératrices et applications

I Cas d'un univers fini

On note $\mathbb{R}[T]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de la variable réelle t. Soit X une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit sa *fonction génératrice* G_X par :

$$G_X : \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}[T] \\ t \mapsto E(t^X) \end{cases}$$

I.A – Définition et propriétés

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $X(\Omega) = \{x_1, ..., x_n\} \subset \mathbb{N}$.

Q 1. Montrer que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G_X(t) = \sum_{k=1}^{n} P(X = x_k) t^{x_k}$$

et en déduire que G_X est fonction polynomiale en t.

Q 2. Calculer $G_X(1)$.

Q 3. Calculer G_X sous la forme la plus factorisée possible si la variable aléatoire X suit une loi de Bernouilli de paramètre $p \in \,]0, 1[$.

Q 4. Calculer G_X sous la forme la plus factorisée possible si la variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$.

Q 5. Calculer G_X sous la forme la plus factorisée possible si la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètre $p \in \,]0, 1[$.

Q 6. Montrer que si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ et à valeurs dans $\mathbb{N}$ alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.

I.B – Une application

On jette deux dés à six faces. On note X et Y les variables aléatoires donnant la valeur de la face obtenue par le premier et le second dé. On suppose que ces deux variables aléatoires sont indépendantes. On note $Z = X + Y$ la variable aléatoire donnant la somme des deux faces obtenues.

Q 7. Préciser l'univers Ω modélisant cette expérience aléatoire.

Q 8. Calculer $Z(\Omega)$.

On suppose qu'il est possible de piper les deux dés de sorte que la variable aléatoire Z suive une loi uniforme sur $[\![2, 12]\!]$.

On note alors pour $k \in [\![1, 6]\!]$, $\alpha_k = P(X = k)$ et $\beta_k = P(Y = k)$.

Q 9. Montrer que la fonction génératrice de Z est de la forme $G_Z(t) = t^2 P(t)$ avec P un polynôme de degré 10 à coefficients réels.

Q 10. Proposer une autre écriture de la fonction génératrice de Z de la forme $G_Z(t) = t^2 Q(t) R(t)$ avec $Q \in \mathbb{R}_5[T]$ et $R \in \mathbb{R}_5[T]$.

Q 11. Montrer que $P = QR$ puis que Q et R sont de degré 5.

Q 12. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\displaystyle\sum_{k=0}^{10} z^k = 0$ et montrer qu'elle n'admet aucune solution réelle.

Q 13. Prouver que Q et R ont chacun au moins une racines réelles.

Q 14. Aboutir à une contradiction. Conclure.

II Cas d'un univers infini

II.A – Définition et propriétés

On considère un univers Ω dénombrable muni d'une probabilité $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$. Soit X une variable aléatoire définie sur Ω et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On définit sa *fonction génératrice* G_X par :

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X=k)t^k$$

pour les réels $t \in \mathbb{R}$ tels que la série $\sum_{k\geqslant 0} P(X=k)t^k$ converge (ce qui revient à dire par le théorème de transfert que t^X admet une espérance finie).

Q 15. Montrer que la série entière définissant la fonction génératrice de X a un rayon de convergence R supérieur ou égal à 1.

Q 16. Montrer que G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$.

Q 17. Montrer que si $R > 1$ alors G_X est deux fois dérivable en 1, puis que X admet une espérance et une variance données par :

$$E(X) = G'(1), \quad E\left(X(X-1)\right) = G''_X(1), \text{ et } V(X) = G''_X(1) + G'_X(1) - \left(G'_X(1)\right)^2.$$

Un exemple :

Q 18. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ une variable aléatoire qui suit un loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$:

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X=k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}.$$

Montrer que la fonction génératrice G_X de cette loi a un rayon de convergence égal à $R = +\infty$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\lambda}\frac{t^k\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda t}.$$

Q 19. En déduire que X admet une espérance et une variance finie puis l'expression de cette espérance et de cette variance.

II.B – Première application : une loi construite à partir de la loi de Poisson

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Soit Y la variable aléatoire réelle définie par :

$$\begin{cases} X/2 & \text{si } X \text{ est paire} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q 20. Montrer que $P(Y=0) = \mathrm{e}^{-\lambda}\left(1 + f(\lambda)\right)$ avec $f(\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{2k+1}}{(2k+1)!}$.

Q 21. Montrer que $\forall \lambda > 0,\ f(\lambda) = \frac{e^{\lambda} - e^{-\lambda}}{2}$.

Q 22. Déterminer la loi de Y.

Q 23. Calculer l'espérance de Y.

II.C – Seconde application : une loi produit

Soit Ω un univers dénombrable muni d'une probabilité $P : \Omega \to [0,1]$. On considère deux variables aléatoires X et Y définies sur Ω telles que :

- $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$;
- $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ avec $p \in]0,1[$;
- X et Y sont *indépendantes*, ce qui signifie que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{0,1\}$, $P((X=n) \cap (Y=k)) = P(X=n)P(Y=k)$.

On pose $Z = XY$ et on note G_X, G_Y, G_Z les fonctions génératrices de ces trois variables aléatoires.

Q 24. Montrer que $P(Z=0) = q + p\mathrm{e}^{-\lambda}$ où $q = 1-p$.

Q 25. En déduire que $G_Z = G_Y \circ G_X$.

Q 26. Puis calculer l'espérance et la variance de Z.

• • • FIN • • •